Årg. 41:3 Sept. 1958

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

TREDJE HÄFTET

Stig Anvill och Per M. Carlberg, Moderna magnetiska material I 169

Josef Andersson, Periodiska kurvor med symmetriegenskaper 178

Sune Berndt, Luftmotståndet vid flygning I 183

Jakob Lundström, Om magiska rektanglar 198

Notiser: Arne Ölander, Om talet 9^{9^9}; Bengt Liljeqvist, Kvicksilverspektrum; Hj. Trane, En rättvänd bild på näthinnan uppfattas som omvänd; Torsten Wilner, Elektrolytiska elmätare; G. Starck, En bestämning av smältpunkten för tenn 202

Aktuellt: Arne Pleijel, En förening för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i västra Sverige; Folke Lindskog, Kurs i fysik; Ivar Stål, Kurs i kemi; Sten Paulson, Industriorientering för lärare 207

Bokanmälningar: Buck, Advanced Calculus; King-Laï Hiong, Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algébroïdes; Murdoch, Linear Algebra for Undergraduates; Kunz, Numerical Analysis; Nyhlén/Amundsson/Broman, Rymdgeometri för gymnasiet; Hyrenius, Statistiska metoder; Hogben, Statistical Theory; Booth, Programming for an Automatic Digital Calculator; Synge, The Hypercircle in Mathematical Physics; Easthope, Three Dimensional Dynamics; Cowling, Magnetohydrodynamics; Dislocations and Mechanical Properties of Crystals; Hartree, The Calculation of Atomic Structures; Daudel, Les fondements de la chimie théorique; Guillet, Précis de métallographie; Duckworth, Mass Spectroscopy; Hooper/Scharff, The Cosmic Radiation; Series, The Spectrum of Atomic Hydrogen; Gibson/Aigrain/Burgess, Progress in Semiconductors; Goldman, The Science of Engineering Materials; Rostoker, The Metallurgy of Vanadium; forts. å omslagets andra sida.

Problemavdelning:
Matematiska problem (red. av S. Bågman). 235
Matematiska och fysikaliska uppgifter i fyllnadsprövning efter studentexamen aug. 1958 238

Författare i detta häfte (omslagets andra sida); Insänd litteratur (247)

Annonsörer i detta häfte: Almqvist & Wiksell; R. Grave; Lindståhls Bokhandel; Norstedt & Söner; AB Philips; Svenska Bokförlaget.

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

Bokanmälningar (forts.): Reports on Progress in Physics; Year Book of the Physical Society; WOLF, Erdsatellit und Weltraumfahrt; SCHRÖDER, Kortvågshandboken; HÖFLING, Physik-Aufgaben; FRUTON/SIMMONDS, General Biochemistry; MULDOON/BLAKE, Systematic Organic Chemistry; WALLENQUIST, Astronomi; LÖVGREN, Atomernas historia; FRITZ/HAMMOND, Quantitative Organic Analysis; BECKER/STRACK, Chemiefaserstoffe; KIESSLING, Atomreaktorer och deras materialproblem; WELLS, The Third Dimension in Chemistry; FRAUENFELDER/HUBER, Einführung in die Physik 210, 246

Kemiska reaktionsformler

av professor Lars Gunnar Sillén

föreligger nu i fjärde tryckningen (sept. 1958). I detta särtryck av uppsatser i Elementa visar författaren hur reaktionsformler bör skrivas för att de skall överensstämma med de senaste årtiondenas framsteg inom lösningskemin. Pris kr. 2:60

De nya skrivningstyperna i matematik

i studentex., som ges fr. o. m. mars 1957, finner Ni i »Problemhäfte 1957» men även i »Problemhäfte 1956», som innehåller Skolöverstyrelsens »Övningsuppg. i matematik till studentexamen». I dec. tillkommer »Problemhäfte 1958» med de under innevarande år givna uppg. Pris per häfte kr. 2:20.

Om övriga särtryck, tidigare årg. av Elementa och pärmar se annonsbladet invid sid. 185.

Stärbhus

säljer genom Elementas exp. en komplett Elementa-serie, årg. 1—40 i 20 förlagsband; en komplett serie Populär Astronomisk Tidskrift, årg. 1—38 i häften; Kosmos band 1—24 i originalband.

Författare i detta häfte: fil. lic. T. ALVÄGER, Stockholm; fil. dr J. ANDERSSON, Vaxholm; civiling. S. ANVILL, Surahammar; docent K.-B. AUGUSTINSSON, Stockholm; docent S. BERNDT, Stockholm; prof. G. BJÖRLING, Stockholm; fil. dr G. BLOM, Malmö; civ.ing. J. BLOMQVIST, Stockholm; assistent J.-L. CALAIS, Uppsala; bergsing. P. CARLBERG, Surahammar; lektor B. ENGLUND, Uppsala; prof. H. FAXÉN, Stockholm; prof. S. VON FRIESEN, Lund; laborator C.-E. FRÖBERG, Lund; assistent A. FRÖMAN, Uppsala; lektor B. GRUNDSTRÖM, Djursholm; laborator A. JOHANSSON, Stockholm; lektor T. JÖNSSON, Stockholm; prof. B. KJELLBERG, Stockholm; prof. O. LEHTO, Helsingfors; lektor B. LILJEQVIST, Stockholm; prof. J. O. LINDE, Stockholm; lärov. adj. F. LINDSKOG, Sigtuna; lektor A. LJUNGHALL, Uppsala; fil. lic. D. LUNDQVIST, Stockholm; byrådirektör J. LUNDSTRÖM, Stockholm; docent P. O. LÖWDIN, Uppsala; fil. mag. S. MATHISSON, Stockholm; docent S. B. NILSSON, Lund; lektor S. PAULSON, Lidköping; rektor A. PLEIJEL, Trollhättan; lärov. adj. K. VON PROSCHWITZ, Stockholm; fil. lic. H. RIESEL, Stockholm; prof. E. RUDBERG, Stockholm; lektor E. SAMÉN, Borås; lektor L. SIHLBOM, Stockholm; lektor G. STARCK, Stockholm; lärov. adj. I. STÅL, Saltsjöbaden; lektor B. SVENONIUS, Göteborg; lektor HJ. TRANE, Jönköping; laborator T. WILNER, Stockholm; tekn. lic. H. U. ÅSTRÖM, Stockholm; prof. A. ÖLANDER, Stockholm.

"Som en frisk fläkt

kom i höstas Anders Boierths Biologi för realskolan och enhetsskola ... Boken, som med ett minimum av text och bilder ger eleverna inblick i själva livet och de biologiska sammanhangen."

Läroverksadjunkt Tofte Hylander i Tidning för Sveriges Läroverk

Anders Boierth

BIOLOGI

För realskolan klass 1^3—2^3, 1^4—3^4 och enhetsskolan klass 7—8

Inb. 4:95 G

Bra bok ännu bättre

Öhman — Boierth

MÄNNISKOKROPPEN

och dess funktioner

Fjärde omarbetade upplagan

"Som slutomdöme kan ärligt sägas ifrån, att boken ligger långt över sina föregångare."

5:75 G *Tidning för Sveriges Läroverk*

ALMQVIST & WIKSELL

Box 159 - Stockholm 1 - Postgiro 758

LEYBOLD-APPARATER

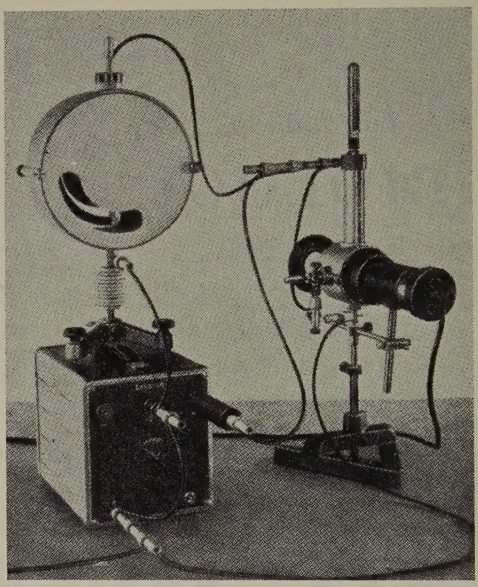
för

KÄRNFYSIKALISKA FÖRSÖK

Bilden visar:
Observation av α- och β-strålning med Geiger-Müller-rör och Wulf-elektroskop

—

För ytterligare informationer begär
SPECIALPROSPEKT
PH 34



När det gäller fysikalisk apparatur

TAG KVALITET • TAG LEYBOLD

RUDOLPH GRAVE AB

SKOLAVDELNINGEN

Box 3082, Malmskillnadsg. 48 c, Stockholm 3, Tel. 23 37 80
Box 4158, St. Nygatan 27 b, Malmö 4, Tel. 381 25

Moderna magnetiska material I

Av civilingenjör Stig Anvill och bergsingenjör Per M. Carlberg, Surahammar

De ferromagnetiska materialen kännetecknas som bekant av att sambandet mellan det magnetiserande fältet H och den därav framkallade flödestätheten B i materialet ej är linjärt och entydigt. Permeabiliteten $\mu = B/H$ är vid låga fält mycket stor, men med ökande H närmar sig materialet ett tillstånd av magnetisk mättning, som kännetecknas av att den inducerade flödestätheten J, definierad av ekvationen

$$B = J + H \qquad (1)$$

närmar sig ett konstant, för varje ferromagnetiskt material karakteristiskt värde.

I avhandlingar inom detta område brukas ännu CGS-systemet, och detta har därför använts även här. Enheten för H är där 1 örsted och för B 1 gauss. Det rationaliserade MKSA-systemet användes numera vid den högre undervisningen i vårt land och blir allt vanligare vid konstruktions- och beräkningsarbeten. I detta system är enheten för H 1 A/m $= 4\pi \cdot 10^{-3}$ örsted och enheten för B 1 weber/m$^2 = 10^4$ gauss.

I nutida svensk teknisk litteratur användes magnetisk fältstyrka jämsides med flödestäthet som benämning för B. I äldre litteratur kallas B magnetisk induktion och H magnetisk fältstyrka.

A. Översikt av teorien för magnetiska material

Domänteori

För att förklara den varierande permeabiliteten antog Weiss, att kristallerna äro uppdelade i ett antal mindre områden, elementarområden eller domäner, som vart och ett är spontant magnetiserat till mättning. I det avmagnetiserade tillståndet äro domänerna magnetiserade i sådana riktningar, att totalsumman av alla magnetiseringsvektorerna blir noll. I det mättade tillståndet äro alla magnetiseringsvektorerna likriktade. Övergången mellan dessa två tillstånd kräver för olika materialtyper mycket olika fält. Vid de mjukmagnetiska legeringarna sker övergången lätt (hög permeabilitet), medan den vid de hårdmagnetiska kräver mycket höga H-värden. För att rätt förstå de magnetiska problemen måste man följaktligen i första hand studera domänerna och deras egenskaper.

Domänernas storlek, fördelning och magnetiseringsriktning bestämmas av olika faktorer, som lättast kunna överblickas för en enkristall. Den grundläggande principen för en kristalls uppdelning i domäner är att den totala energien skall vara så låg som möjligt.

En domäns energi beror bl. a. av kristallenergien, magnetostatisk energi och domänväggenergi.

Kristallenergien. En ferromagnetisk kristall har vissa magnetiska företrädesriktningar. I järn eller kisellegerat järn och i nickellegerat järn med 50 % Ni utgöras dessa av kubkanterna, dvs. [100]-riktningarna. För att vrida magnetiseringen ur en dylik företrädesriktning erfordras ett visst arbete, som kallas kristallenergien F_K. Man brukar uttrycka F_K för en viss riktning som en funktion av riktningscosinerna α_1, α_2 och α_3 för denna riktning relativt kristallgittret, och man får då av symmetriskäl följande ansats:

$$F_K = K_0 + K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2\,\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 \ldots \qquad (2)$$

Konstanten K_0, som anger kristallenergien i företrädesläget, har merendels mindre intresse och utelämnas som regel, eftersom det främst är skillnaden mellan olika kristallriktningar, som är av värde. För rent järn är $K_1 = 4{,}8 \cdot 10^5$ erg/cm^3. Detta värde ändras ofta avsevärt vid tillsats av legeringsämnen, såsom kisel. Vid 3,5 % Si kan man räkna med $K_1 = 2{,}7 \cdot 10^5$ erg/cm^3. Legeringar av järn och nickel med Ni-halter av 50 till 90 % ha låg magnetisk anisotropi. Speciellt gäller detta permalloy-legeringarna med ca 78 % Ni, vilka praktiskt taget sakna anisotropi.

Elastisk energi. När en kristall magnetiseras, undergår den vissa längdförändringar (magnetostriktion). Magnetostriktionens storlek och tecken varierar med legering och kristallriktning. För järn och järnkisellegeringar är den positiv i kubkantens riktning. De relativa förlängningarna äro små och uppgå för järn till ca 0,002 ‰ vid mättning. För permalloy-legeringar med 78 % Ni är magnetostriktionen praktiskt taget noll. Om förlängningen hindras eller om kristallen tvångsvis förlängs på ett sätt, som ej står i samklang med den naturliga magnetostriktionen, tillföres en elastisk energi

$$F_E = konst.\,(\lambda\sigma) \qquad (3)$$

där λ är magnetostriktionskoefficienten och σ spänningen.

Magnetostatisk energi. Om en domän slutar vid en fri yta så att magnetiseringsriktningen står i vinkel mot ytan, bildas på denna fria magnetiska poler, vilka ge ett magnetostatiskt energitillskott.

Domänväggenergi. Mellan domänerna finns ett övergångsskikt av ändlig tjocklek. Utbytesenergien, som är ett uttryck för de krafter,

som sträva att likrikta atomernas magnetiska moment, kräver att övergången mellan två domäner sker så gradvis som möjligt. Domänerna äro som regel magnetiserade i en företrädesriktning, och en skiljevägg med ändlig tjocklek betyder alltså, att magnetiseringen i väggen måste vara riktad i vinkel mot en företrädesriktning, varigenom väggens kristallenergi ökar. Sett från denna synpunkt erfordras alltså en skarp övergång mellan domänerna. Skiljeväggen får en tjocklek, som gör summan av dess utbytesenergi och dess kristallenergi till ett minimum. För järn har väggen en tjocklek av 500 till 1000 Å. Energien är av storleksordningen 2 erg/cm².

I fig. 1 antydes några olika möjligheter att dela upp en kristall i domäner. Kristallenergien är mycket hög, och endast i ett absolut tvångsläge avviker domänens spontana magnetiseringsriktning från en magnetisk företrädesriktning. De fria polerna i fig. 1 a ge upphov till en avsevärd magnetostatisk energi. Denna kan minskas genom uppdelning i flera parallella domäner (fig. 1 b) eller genom bildning av ytliga domäner, varigenom magnetiseringen slutes (fig. 1 c och d). I det senare fallet erhållas inga ytladdningar. Den minskade magnetostatiska energien har köpts med en ökning av domänväggsenergien (större total yta) och med en ökning av magnetoelastiska energien.

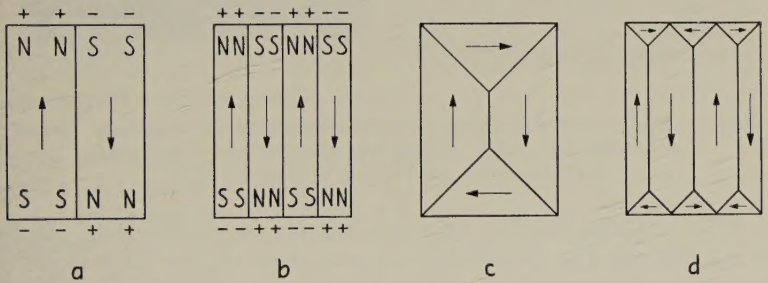
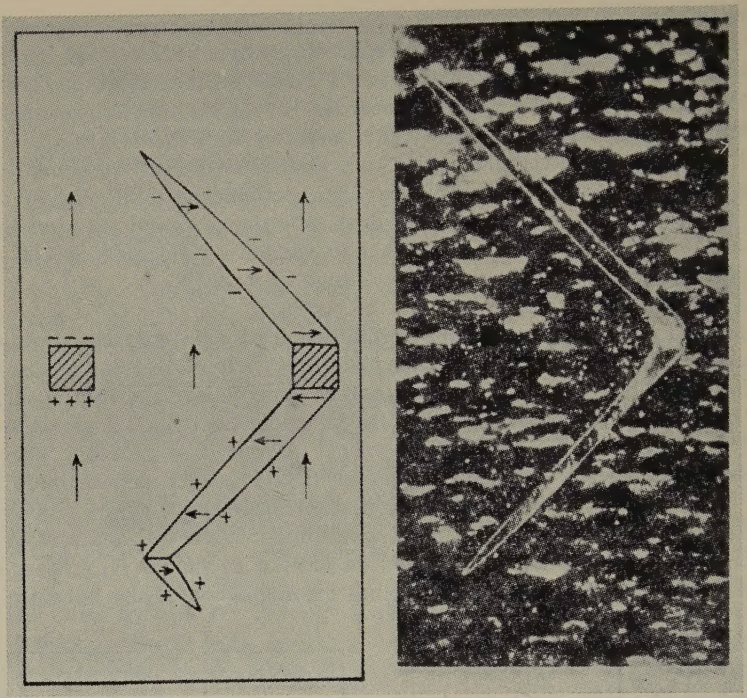


Fig. 1. Uppdelning i domäner. a) Fria poler ge hög magnetostatisk energi. b) Denna kan minskas genom uppdelning i flera domäner. c) och d) 90°-ytdomäner sluta kretsen.

Domänernas storlek beror alltså av kristallernas storlek. När kristallen blir mindre, bli även domänerna mindre, vilket betyder, att väggenergien spelar en större och större roll. När man kommit ned till en viss storlek på kristallerna, blir väggenergien relativt den magnetostatiska energien så hög, att det inte längre är lönsamt med en uppdelning i domäner. Kristallen blir då en enda domän, och detta inträffar, då kristallens dimensioner äro av samma storleksordning som domänväggens tjocklek, dvs. vid en kristalldiameter av



Reviews of Modern Physics

Fig. 2. Kring en inneslutning bildas bladformade 90°-domäner för att eliminera fria poler. (Teoretiskt förutsagt av Néel 1944, experimentellt påvisat av Williams 1947.)

ca 1000 Å. Detta betyder att kristallen får okompenserade ytladdningar, eller m. a. o. att den blir en permanent magnet. Den moderna teorien för permanenta magneter grundar sig på detta förhållande.

I praktiken rör man sig alltid med polykristallina material. Om de olika kristallerna mycket avvika i orientering från varandra, torde man få en domänuppdelning i varje enskild kristall såsom om den vore en enkristall. I ett material med kristaller, som alla nära ansluta sig till en viss riktning (ett s. k. orienterat material), kunna domänerna gå genom flera korn. Små utjämningsdomäner bildas dock för att undvika de fria poler, som annars bildas på grund av vinkelskillnaden mellan kornens orienteringar.

En hålighet eller omagnetisk inneslutning inne i en domän ger upphov till inre laddningar (fig. 2). Man kan visa, att den magnetostatiska energien kan minskas avsevärt genom tillkomsten av små,

bladformade domäner. I stället får man en ökning av energien genom tillkomsten av nya domänväggar, och slutresultatet blir som vanligt en kompromiss mellan kraven på låg statisk energi och låg väggenergi. Om en domänvägg passerar en hålighet eller omagnetisk inneslutning, kan man tänka sig de två möjligheterna enligt fig. 3 a och b, av vilka b saknar fria laddningar. Kring håligheter och inneslutningar, som äro mindre än domänväggens tjocklek, kunna extra domäner ej bildas.

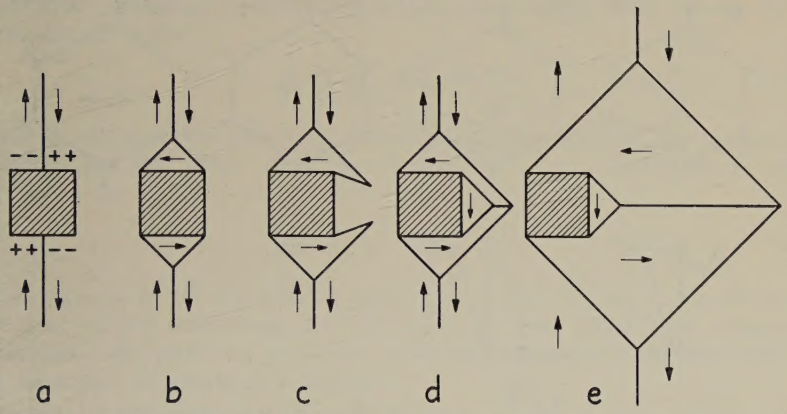


Fig. 3. Bildning av 90°-domäner, då en 180°-domänvägg passerar en omagnetisk inneslutning.

Experimentella undersökningar av domänernas beteende (fig. 2) ha på senare år utförts av bl. a. Williams i U. S. A. och Bates i England. Därvid studeras de mönster, som uppstå, om en droppe kolloidal magnetitlösning (Fe_3O_4) placeras på ett ferromagnetiskt mikroprov. Kolloiden kommer att samlas kring fria ytladdningar, som bl. a. uppstå vid domänväggarna. Förloppet vid magnetisering kan på detta sätt studeras i mikroskop vid ett par hundra gångers förstoring. Tekniken är svår och kräver en helt spänningsfri provyta, som endast kan erhållas genom elektrolytisk polering.

Förloppet vid magnetisering av mjukmagnetiska material

I fig. 4 visas en i domäner uppdelad kristall av ett ferromagnetiskt material. De olika bilderna avse att schematiskt beskriva förloppet av en magnetisering. Först sker en förskjutning av domänväggarna, så att de domäner, vars spontana magnetiseringsriktning närmast överensstämmer med det magnetiserande fältet, tillväxa på de andra domänernas bekostnad. Småningom återstå (fig. 4 c) endast domäner, vars spontana magnetiseringsriktning bilda mer eller mindre spetsiga vinklar med det yttre fältet.

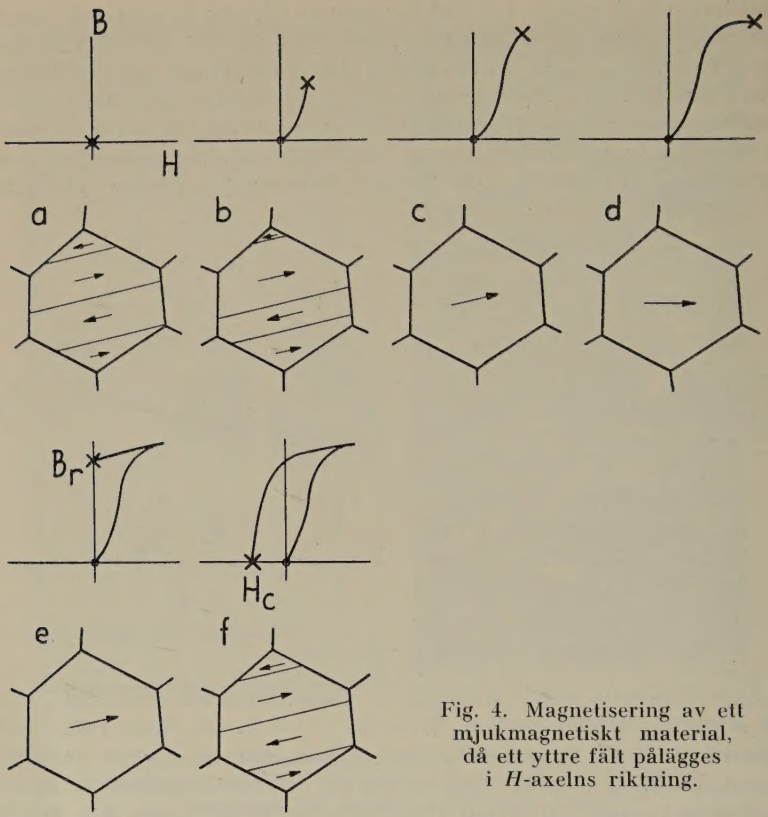


Fig. 4. Magnetisering av ett mjukmagnetiskt material, då ett yttre fält pålägges i H-axelns riktning.

Den slutliga magnetiseringsprocessen består av ett långsamt vridande av magnetiseringen inom domänerna ur den spontana riktningen över till det yttre fältets riktning. Denna vridningsprocess sker under motstånd från mycket starka kristallkrafter och kräver därför ett avsevärt yttre fält (fig. 4 d). Om det yttre fältet minskas till noll, går magnetiseringen inom domänerna tillbaka till det läge, som förelåg före vridningarnas början. Man har kvar remanensen B_r (fig. 4 e). För att åter få kristallen avmagnetiserad måste man genom ett negativt fält bilda domäner med antiparallell magnetisering och driva dessas väggar så, att de växa på de andra domänernas bekostnad (fig. 4 f). Vid $B=0$ har man fått öka det negativa fältet till H_c, koercitivkraften.

Som regel eftersträvar man en hög permeabilitet, dvs. en brant stigning av magnetiseringskurvan, så att så lågt fält som möjligt

erfordras för att nå en viss flödestäthet. Det gäller med andra ord att förflyttningarna av domänväggarna ske så lätt som möjligt utan att ta för stort fält i anspråk. Fig. 5 visar ett parti av en kristall med två antiparallellt magnetiserade domäner S och T, skilda åt av väggen i ursprungsläget A. Ett fält H pålägges. Fältet bildar den spetsiga vinkeln α med S:s magnetiseringsriktning. Under skissen av domänerna visas, hur väggens och dess närmaste omgivnings energi varierar med lägeskoordinaten x. Det magnetiska fältet utövar på väggen ett tryck

$$p = 2 \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot HJ_s \cos \alpha \qquad (4)$$

där J_s är den vid mättning inducerade flödestätheten. När väggen flyttar sig dx, växer dess energi med $dE = p\,dx$, varför man vid jämvikt får

$$\frac{dE}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot HJ_s \cos \alpha \qquad (5)$$

Vid ökande H rör sig alltså väggen från A mot B i fig. 5. I punkten B har dE/dx maximum. När B passerats, kan följaktligen väggen fortsätta sin vandring åt höger, utan att fältstyrkan behöver ökas. I närheten av punkten C börjar emellertid energien att växa raskt igen, och dE/dx får ett större värde än vid B. För vidare förflyttning åt höger av väggen måste alltså H ökas ytterligare. De reversibla väggförflyttningarna A—B motsvara begynnelsepermeabilitetens område i början av magnetiseringskurvan. De irreversibla, språngvisa förflyttningarna B—C ligga på magnetiseringskurvans branta del. Vid väggens förflyttning sker en ständig ommagnetisering, vilket betyder, att väggen åtföljs av en virvelströmsfront, som omsätter dess tidigare statiska energi i värmeförluster.

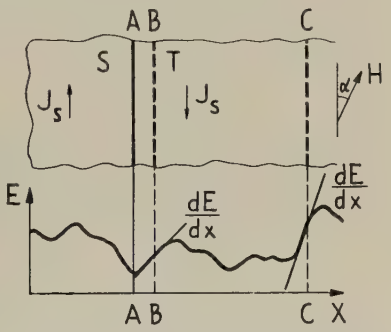


Fig. 5. Domänväggens förflyttning vid ökande magnetiserande fält H.

Den i fig. 5 antydda variationen av domänväggens energi anses bero på inre spänningar och på icke magnetiska inneslutningar och de fria statiska laddningar, som dessa medföra. Inneslutningarnas stora betydelse visades första gången av Kersten (1943), som helt enkelt räknade med den minskning i domänväggens yta, som uppstod, när en domänvägg passerade en inneslutning. Néel tog senare hänsyn

till energien i de inre magnetiska laddningarna och i de domänväggar, som uppbyggas för att undvika dessa laddningar. Inre spänningar förorsaka fria poler därigenom att magnetiseringen lokalt bringas ur företrädesriktningen. Detta blir särskilt markant vid material, där detta lätt kan ske, dvs. då anisotropikonstanten är låg. Detta är framför allt fallet med de nickellegerade, mjukmagnetiska materialen.

En noggrann beräkning av inneslutningarnas och de inhomogena spänningarnas bidrag till koercitivkraften blir naturligtvis mycket svår att genomföra, eftersom man måste ta hänsyn till en oregelbunden statistisk fördelning av dessa. Beräkningar ha bl.a. utförts av Néel och av Dijkstra och Wert. Néel's formler kunna för några intressanta materialtyper uttryckas sålunda:

Järn:	$H_c = 2v + 360s$ örsted	(6 a)
Järn med 3,5 % Si:	$H_c = 2v + 250s$ örsted	(6 b)
Järn med 50 % Ni:	$H_c = 105v + 50s$ örsted	(6 c)
Nickel:	$H_c = 330v + 97s$ örsted	(6 d)

där v är volymsandelen med inre spänningar av storleksordningen 30 kp/mm², och s volymsandelen icke magnetiska inneslutningar. Dessa uttryck visa, att de kisellegerade kvaliteterna utmärkas av stor känslighet för icke magnetiska inneslutningar och av förhållandevis liten känslighet för inre spänningar. För de nickellegerade kvaliteterna är förhållandet det omvända.

Materialets kornstorlek har även inflytande på koercitivkraften. Dijkstra och Wert ha visat, att H_c är omvänt proportionell mot korndiametern. Man kan enkelt förklara detta med att ju större area på domänväggen, ju mindre skillnad i antalet av denna inneslutna omagnetiska partiklar i olika lägen av väggen, och ju mindre värden på dE/dx i ekv. (5).

Förloppet vid magnetisering av permanentmagnetiska material

Ovanstående formler (6) visa tydligt, att de med moderna permanentmagnetiska material möjliga koercitivkrafterna på 1000 örsted och mera ej kunna förklaras med inre spänningars och inneslutningars hindrande av domänväggarnas rörelse. Enligt nyare teorier av Néel samt av Stoner och Wohlfahrt bör man förklara de höga koercitivkrafterna på följande sätt. Om kristallkornet göres mindre, blir som tidigare påpekats domänväggens tjocklek relativt större, och när kornet blivit av samma storleksordning som domänväggens tjocklek (100 à 1000 Å) är det omöjligt att tänka sig en uppdelning av kornet i domäner. Kornet utgör alltså en enda domän. För att

ändra domänen-kristallkornets magnetiseringsriktning fordras därför en vridning ur det spontana läget, vilket på grund av kristallanisotropi och formanisotropi kräver högt H-värde. Kristallkorn av dessa små dimensioner kunna erhållas genom att överföra materialet till ett ytterst fint pulver, som ingjutes i lämpligt bindemedel, eller genom att åstadkomma fint fördelade utskiljningar, som sönderdela det ursprungliga större kristallkornet. Den senare metoden har den största praktiska betydelsen.

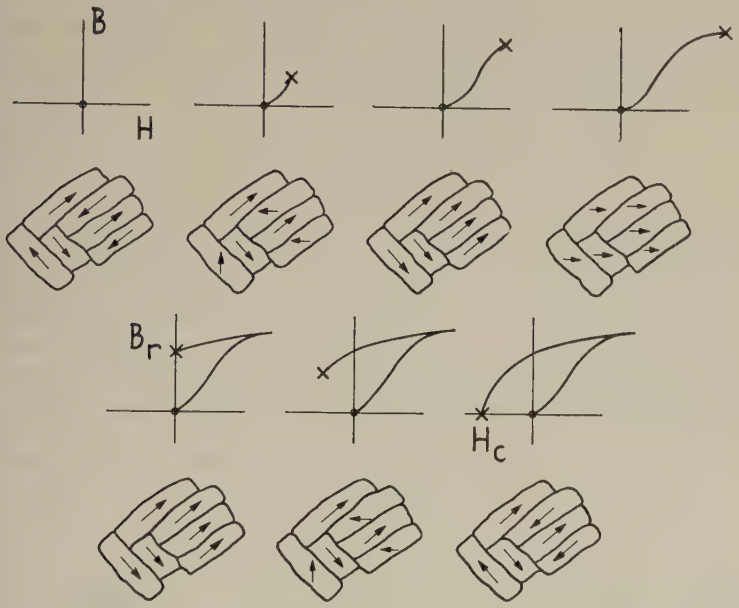


Fig. 6. Magnetiseringsprocessen i ett permanentmagnetiskt material. då ett yttre fält pålägges i H-axelns riktning.

Det omagnetiserade tillståndet åstadkommes på samma sätt som vid de mjukmagnetiska materialen av att domänernas (= kristallkornens) magnetiseringsriktningar äro statistiskt fördelade i alla tänkbara riktningar. Om ett yttre fält pålägges, vrides magnetiseringsriktningarna långsamt in i det yttre fältets riktning (fig. 6). När sedan det yttre fältet borttages, vrides magnetiseringen inom domänerna tillbaka till de spontana magnetiseringsriktningar, som bilda den spetsigaste vinkeln med den riktning, som det nu borttagna fältet hade. För att magnetiseringen noll skall återfås, måste i en del domäner magnetiseringen vridas över i andra spontana riktningar, som äro motriktade

det ursprungliga yttre fältet, och härtill fordras ett avsevärt motriktat fält (=koercitivkraften).

Det största bidraget till koercitivkraften kommer från formanisotropien. Om domänerna äro långsträckta, få de sin naturliga magnetisering i längdriktningen. Enligt Stoner och Wohlfahrt får man

$$H_c = \frac{1}{2 \cdot 4\pi} \cdot J_s (N_a - N_b) \tag{7}$$

där N_a och N_b äro avmagnetiseringsfaktorerna för längd- och tvärriktningarna. Om man har förhållandet 2:1 mellan längd och bredd, blir $(N_a - N_b)$ ungefär 4,4, vilket med $J_s = 12\,500$ gauss ger en koercitivkraft av storleksordningen 2000 örsted.

Kristallenergien påverkar koercitivkraften enligt uttrycket

$$H_c = \frac{4\pi K_1}{3 J_s} \tag{8}$$

För Alnico-legeringar är K_1 liten, varför formanisotropiens bidrag helt dominerar. För att högsta möjliga remanens skall uppnås böra domänernas längdaxlar ligga i magnetiseringsriktningen.

En senare uppsats kommer att behandla några olika, tekniskt betydelsefulla materialtyper, såsom kisel- och nickellegerad plåt, permanenta magneter och oxidkeramiska material (ferriter).

Periodiska kurvor med symmetriegenskaper

Av fil. dr Josef Andersson, Vaxholm

Funktionen $f(x)$ och därmed kurvan $y = f(x)$ antages vara periodisk med minsta perioden $p > 0$. Allmänna perioden är en godtycklig heltalsmultipel $\pm np$ av p.

De symmetrier som behandlas i det följande äro:

symmetrien $S(C)$ omkring punkten C, som då är ett centrum;
symmetrien $S(a)$ omkring symmetriaxeln a med ekvationen $x = a$.

Bägge kunna förekomma hos samma kurva. Koordinatsystemet är rätvinkligt, om annat ej säges.

I. $S(C)$

Vi förutsätta att $f(x)$ är *kontinuerlig*. Då gäller först att *varje centrum ligger på kurvan*. Man kan anta $C(0;\ 0)$ och ur $f(x)=-f(-x)$ få $f(0)=0$, när $x\to 0$. Vidare följer att *samtliga* $C(\frac{1}{2}np;\ 0)$, $n=0,\ \pm 0,\ \ldots$, *äro centra*, ty

$$f(\tfrac{1}{2}p+x)=-f(-\tfrac{1}{2}p-x)=-f(\tfrac{1}{2}p-x)$$

vilket f. ö. gäller, om p ersättes med en godtycklig period.

Inga andra centra finnas. Ett eventuellt sådant måste också ligga på x-axeln, så att t. ex. $O(0;\ 0)$ och $C(\frac{1}{2}d;0)$ med $0<d<p$ vore centra. Men detta skulle leda till att p ej vore minsta perioden, enär successiva speglingar i O och C resultera i en translation sträckan d i x-axelns riktning, som skulle överföra kurvan i sig själv. Att hälften av centra hos $y=\cot x$ och samtliga hos $y=1/\sin x$ ej tillhöra resp. kurvor beror givetvis på att $f(x)$ ej är definierad och än mindre kontinuerlig för tillhörande x. Även i dylika fall bilda centra raden $(\frac{1}{2}np;\ 0)$, om $(0;\ 0)$ är ett av dem.

Sammanfattningsvis: Kännedomen om en $S(C)$ nedbringar det område som behöver undersökas till en halvperiod.

Skärpas fordringarna på $f(x)$ därhän att $y=f(x)$ skall ha tangent (t) i ett centrum C och att den båge som ligger mellan C och en tillräckligt närbelägen kurvpunkt P skall hel och hållen befinna sig på samma sida om t, så är *detta centrum — eo ipso — en inflexionspunkt*. Detta gäller även t. ex. för $(0;\ 0)$ på $y=\sin^{1/3}x$, fastän $f'(x)$ där är diskontinuerlig.

II. $S(a)$

Finnes en symmetriaxel a kan den tagas till y-axel. I så fall äro *även alla* $x=\pm\frac{1}{2}np$ $(n=1,2,\ldots)$ *symmetriaxlar, men några andra finnas ej*. Det första följer ur (den för en godtycklig period giltiga) ekvationen

$$f(\tfrac{1}{2}p+x)=f(-\tfrac{1}{2}p+x)=f(\tfrac{1}{2}p-x)$$

Vore $x=0$ och $x=\frac{1}{2}d$ med $0<d<p$ två axlar, skulle p ej vara minsta perioden enligt ett resonemang analogt med det ovan förda för centra. Denna placering av de ∞^1 symmetriaxlar som åtfölja en sådan gäller även, när $f(x)$ är diskontinuerlig för hälften av eller samtliga tillhörande x. Tillvaron av en $S(a)$ minskar arbetet med kurvans uppritande till hälften.

Antag, att $x=a$ är en symmetriaxel och att $(a;\ b)$ är en reguljär punkt på kurvan. Då måste *tangenten i* $(a;\ b)$ *vara parallell med* x*-axeln*, och om kurvan ligger ovanför tangenten på ena sidan (och följaktligen på den andra också), är $(a;\ b)$ en minimipunkt. Motsva-

rande gäller för en maximipunkt. Detta att skärningspunkt med symmetriaxel är max.- eller min.-punkt kan naturligtvis inträffa även i andra fall, såsom i (0; 0) på $y=\sin^{2/3}x$.

Släpper man kravet på kontinuitet hos $f(x)$, kunna bl. a. hälften av symmetriaxlarna eller samtliga vara (spets)asymptoter, t. ex. hos $y=\sin^{-2}x$, $y=\sin^{-2}x\cos x$.

Generellt kan man välja en kurvbåge mellan två närbelägna symmetriaxlar helt godtyckligt och sedan fullborda den periodiska kurvan genom speglingar. Då behöva de på symmetriaxlarna belägna kurvpunkterna ej ha någon extremegenskap. Till ex.: $y=x^2\sin x^{-1}$ för $0<x\leqq\frac{1}{2}p$, $y=-x^2\sin x^{-1}$ för $-\frac{1}{2}p\leqq x<0$; $y=0$ för $x=0$.

III. S(C) och S(a)

För kurvor med såväl centrum som symmetriaxel äro exempelvis $(\frac{1}{2}np;\,0)$, $n=0,\,\pm1,\ldots$, centra och $x=\frac{1}{4}p+\frac{1}{2}np$ symmetriaxlar, emedan inbegreppet av dessa senare måste vara invariant vid spegling i ett centrum. Det är här tillräckligt att studera endast en kvartsperiod. Enklaste exemplet har man i den allmänna sinuskurvan $y=k\sin(lx+m)$ med centra $(-m/l+n\pi/l;\,0)$ och symmetriaxlarna $x=-m/l+\frac{1}{2}\pi/l+n\pi/l$.

Exempel

1. $y=3\sin x-4\sin^3x$. Här är $f(x)$ en udda funktion av $\sin x$, och kurvan har alla centra och symmetriaxlar som tillkomma $y=\sin x$. Finnas flera centra till den kontinuerliga kurvan (1), måste de ligga i kurvans skärningspunkter med x-axeln, bl. a. mellan (0; 0) och $(\pi;\,0)$. Dessa punkter $(\frac{1}{3}\pi;\,0)$ och $(\frac{2}{3}\pi;\,0)$ äro verkligen centra, varför $p=\frac{2}{3}\pi$ såsom enklast följer av att (1) är sinuskurvan $y=\sin 3x$.

2. Är i stället $y=\sin x-2\sin^3x=\sin x\cos 2x$, gäller till att börja med detsamma som för (1). Men här skulle $(\frac{1}{4}\pi;\,0)$, och $(\frac{3}{4}\pi;\,0)$, mellan (0; 0) och $(\pi;\,0)$, kunna komma ifråga som extra centra. Tydligen kan man icke få ett system ekvidistanta punkter genom att infoga bägge eller ens endera, varför $p=2\pi$. På symmetriaxeln $x=\frac{1}{2}\pi$ ligger minimipunkten $(\frac{1}{2}\pi;\,-1)$. Sedan behövs endast maximipunkten, vars x-koordinat ligger mellan 0 och $\frac{1}{4}\pi$, men dess bestämning förbigås här. Observera »isoperimetrien» hos y^2.

3. Uppgift nr 3, specialkurs nov. 1957[1] gällde kurvan $y=\sin 2x+2\cos x$, som är ekvivalent med $y=-\sin 2x-2\sin x$ sedan y-axeln

[1] De i exemplen 3, 4 och 6 anförda examensuppg. i studentexamen återfinnas i Elementas decemberh. 1957 och junih. 1948.

förflyttats till $x=\frac{1}{2}\pi$. Då (0; 0) här är centrum och 2π är en period, måste $(\pi; 0)$ även vara ett centrum. Mellan dessa finnes intet extra centrum, ty den kontinuerliga kurvan skär icke x-axeln där. Alltså är $p=2\pi$. Kurvan har inga symmetriaxlar, emedan $\frac{1}{2}\pi+x$ och $\frac{1}{2}\pi-x$ ej genomgående ge lika y-värden. I överenstämmelse härmed har tangenten i inflexionspunkten (0; 0) vinkelkoefficienten -4, medan $(\pi; 0)$ är en terrasspunkt. Skrives y under formen $-8\sin\frac{1}{2}x\cos^3\frac{1}{2}x$, fås enligt regeln för isoperimetriska produkter

$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{1}=\frac{\cos^2\frac{1}{2}x}{3}=\frac{1}{4}$$

varav erhålles minimipunkten $(\frac{1}{3}\pi; -1{,}5\sqrt{3})$. Kurvan är därmed i stora drag klar.

4. Uppgift nr 7, reallinjens matem. gren nov. 1957. Det frågas bland annat efter tangenterna i ändpunkterna av den mellan (1; 0) och $(0; \frac{1}{2}\pi)$ liggande bågen av kurvan $x=\cos^2 y$ samt efter den inflexionspunkt som finnes på denna båge och inflexionstangenten. Sätter man $2x-1=v$, $2y=u$, blir nya ekv. $v=\cos u$, dvs. ekv. för en sinuskurva. I nya systemet är x-axeln v-axel, medan linjen $2x-1=0$ är u-axel. De positiva axelriktningarna äro oförändrade, men enheterna på axlarna äro minskade till hälften. På $v=\cos u$ sträcker sig bågen från (0; 1) till $(\pi; -1)$, och tangenterna i ändpunkterna äro alltså parallella med *y-axeln.*

Inflexionspunkten (centrum) ligger i bågens mittpunkt $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\pi)$, och tangenten där har vinkelkoefficienten -1.

5. Kurvan $y=\sin x/\sin a+\sin a/\sin x$, där $0<a<\frac{1}{2}\pi$ och a given, har samma centra och samma symmetriaxlar som standardkurvan $y=\sin x$. Då $f(x)$ icke har några nollpunkter och inga andra diskontinuitetspunkter än $x=n\pi$, är $p=2\pi$, och det räcker att undersöka $0<x\leqq\frac{1}{2}\pi$. I detta intervall består $f(x)$ av två positiva termer med produkten 1 och har alltså minimivärdet 2 för $\sin x/\sin a=1$, dvs. $x=a$ samt maximum $=\sin a+1/\sin a$ för $x=\frac{1}{2}\pi$.

6. Att bestämma p, $S(C)$, $S(a)$ för en komplicerad kurva $y=f(x)$ kan vara invecklat. Vad man icke bör försumma är att söka förenkla ekvationen genom koordinattransformation.

I en exempelsamling med bifogade lösningar förekommer uppgiften att konstruera $y=\cos x(\cos x-\sqrt{3}\sin x)$. Först konstateras att $f(x)$ har perioden π, emedan $f(x+\pi)=f(x)$, vilket icke är tillräckligt, om det är fråga om p. Därpå uppgöres med hjälp av y' och y'' variationsschemat för y, då $0\leqq X\leqq\pi$, maximi- och minimi- samt inflexionspunk-

ter utpekas och kurvan uppritas. Den ser ut som en sinuskurva. Den *är* en sådan, ty

$$y=2\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$$

med vilken enda rad allt väsentligt varit sagt.

Uppritas en kurva $y=f(x)$, där $f(x)$ är en periodisk funktion i ett snedvinkligt koordinatsystem, behålla period, $S(C)$, centra, inflexionspunkter sina betydelser, men symmetrien $S(a)$ är »sned», dvs. föreningslinjen PP' mellan två sammanhörande punkter är parallell med x-axeln och har sin mittpunkt på $x=a$. Sammanhörande linjer råkas på $x=a$. Hit kan hänföras uppgift nr 6, specialkurs mars 1948, som lyder $2y=x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x=f(x)$. Genom substitutionen

$$X=2x,\ Y=2y-x \text{ övergår den i } Y=2\sin X+\tfrac{1}{4}\sin 2X=F(X)$$

X-axel är $2y-x=0$, Y-axel är $x=0$. Enheten på Y-axeln är $\frac{1}{2}$, på X-axeln $\frac{1}{4}\sqrt{5}$. Liksom flera gånger tidigare inses, att $(X=n\pi;\ Y=0)$ äro centra och inflexionspunkter, att perioden är 2π för F och π för f samt att $X=\frac{1}{2}\pi$ icke är symmetriaxel. Detta sista bekräftas av att centra $(0;0)$, $(\pi;0)$ äro av olika beskaffenhet: tangenten i det förra skär kurvan i 3 sammanfallande punkter, i det senare i 5, vilket framgår av ekv.

$$\frac{d^2Y}{dX^2}=-4\sin X\cdot\cos\frac{^2X}{2}\ \text{(Jämför exempel 3)}$$

Emedan $dY/dX=y'-\frac{1}{2}$, karakteriseras maximi- och minimipunkterna i det ursprungliga systemet av

$$\frac{dY}{dX}=2\cos X+\frac{1}{2}\cos 2X=-\frac{1}{2},\ \text{dvs. } \cos X(\cos X+2)=0.$$

Max.pktr äro $(X=\frac{1}{2}\pi+2n\pi;\ Y=2)$, min.pktr $(X=-\frac{1}{2}\pi+2n\pi;\ Y=-2)$. Överhuvud ligga de punkter på en periodisk kurva $y=f(x)$ med $S(C)$, i vilka tangenterna ha given riktning, på linjer parallella med centrallinjen (=orten för centra), som äro symmetriska två och två till denna.

Slutligen må följande lätt insedda fakta påpekas. Ritas de periodiska kurvorna $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ i samma koordinatsystem, så är ett centrum $(a;0)$ till $y=f$ även centrum till $y=f''$, medan $x=a$ är symmetriaxel till $y=f'$, och en symmetriaxel $x=a$ till $y=f$ är symmetriaxel till $y=f''$, medan $(a;0)$ är centrum till $y=f'$. Detta generaliseras omedelbart för högre derivator.

Luftmotståndet vid flygning I

Av docent Sune Berndt, Kungl. Tekniska högskolan, Stockholm

Man kan öka ett flygplans hastighet i horisontalflykt genom att öka motorns dragkraft och genom att minska flygplanets luftmotstånd. Båda metoderna har av den moderna flygtekniken drivits till en hög grad av fulländning under trycket av militär och kommersiell konkurrens. Utvecklingen av allt effektivare flygmotorer — propellerförsedda kolv- och turbinmotorer för låg underljudfart, luftförbrukande strålmotorer för hög underljudfart och överljudfart samt raketmotorer för hög överljudfart — har fortgått parallellt med ett intensivt teoretiskt och experimentellt forskningsarbete för att nedbringa luftmotståndet till ett minimum. Allt eftersom flyghastigheterna närmat sig och överskridit ljudhastigheten, har motståndskraven allt mera fått bestämma flygplanens yttre form. Detta framgår exempelvis av figurerna 1 och 2, vilka visar två typiska jaktflygplan, konstruerade för olika hastighetsområden. I själva verket torde det inte finnas något bruksföremål, som i högre grad än ett modernt flygplan förtjänar benämnas funktionalistiskt: dess yttre form är i varje detalj betingad av dess användning.

Avsikten med denna uppsats är att beskriva de fysikaliska fenomen som bestämmer sambandet mellan ett flygplans form och dess luftmotstånd, så att det på ett åskådligt sätt framstår varför formen har blivit som den är. Framställningen blir nödvändigtvis koncentrerad och ensidig; åt den som vill ha en fylligare bild av luftmotstånd och andra aerodynamiska fenomen rekommenderas varmt en liten bok om den moderna aerodynamikens utveckling, nämligen Th. v. Kármán, Aerodynamics, Ithaka 1954. Den är skriven av en som själv var med, och den vimlar av roande anekdoter och stimulerande randanmärkningar.

Motståndet ur energisynpunkt

Då ett flygplan framdrives med konstant hastighet U, så uträttas mot luftmotståndet D (=luftkraftresultantens mot flygriktningen riktade komponent) ett arbete per tidsenhet, som är $P=DU$. Vid stationärt strömningstillstånd har man därför en konstant energiström P bort ifrån flygplanet, vilket innebär att man vid fortfarighetstillstånd

Fig. 1. Jaktflygplan typ Thulin »NA», byggt 1917—18. Max. fart ca 200 km/h.

(=oändligt lång tid efter starten) har tillfört strömningsfältet en oändlig energimängd. Denna energi kan ha formen av antingen rörelseenergi, som luften bibringats av flygplanet, eller av inre energi (värme) hos luften (rörelseenergien omsättes naturligtvis till slut i värme genom inverkan av luftens inre friktion). Om man antar, att de av flygplanet förorsakade störningshastigheterna hos luften är proportionella mot flyghastigheten, så bör energitillskottet per tidsenhet kunna skrivas

$$P = C_D \cdot \frac{1}{2} \varrho \, U^2 \cdot SU$$

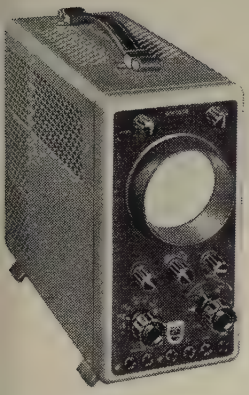
där ϱ är luftens täthet och S är en typisk referensyta hos flygplanet, t. ex. vingens yta. Man sätter alltså P=(en proportionalitetskonstant)×(ett mått på rörelseenergien per volymsenhet)×(ett mått på den av flygplanet per tidsenhet störda luftvolymen). En liknande överläggning beträffande värmeproduktionen leder till samma resultat. Men eftersom $P = DU$, kommer man fram till följande ansats för motståndet:

$$D = C_D \cdot \frac{1}{2} \varrho \, U^2 \cdot S \qquad (1)$$

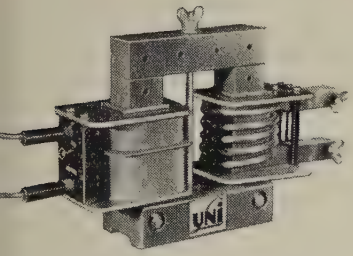
Konstanten C_D, vilken man lätt övertygar sig vara dimensionslös, benämnes *motståndskoefficient*. Den beror naturligtvis på flygplanets form men bör vara oberoende av dess storlek, av luftens tillstånd och

PHILIPS-
INSTRUMENTEN

gör undervisningen
ättare för lärarna och
ntressantare för eleverna.

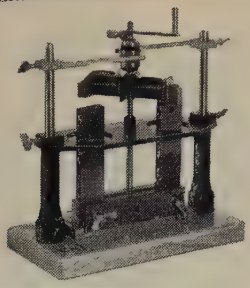


Katodstråleoscilloskopet GM 5650

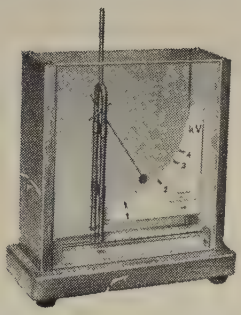


xperimenttransformatorn P5/3

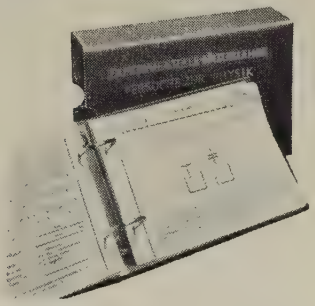
vanstående är bara några exempel på en sortering av instrument och litteratur som hilips tillhandahåller speciellt för fysikunervisning. Vi sänder Er gärna specialprobekt på dessa samt vår stora huvudkatalog ver mättekniska utrustningar.



Motorgeneratormodellen P5/4



Statisk Voltmeter P5/6



Experimentelle Naturlehre
— Versuche zur Physik

PHILIPS

PHILIPS

Svenska Aktiebolaget Philips
Mätinstrumentavdelningen
Postbox 6077 • Stockholm 6.
Tel. 34 05 80. Rikssamtal 34 06 80

Jubileumsupplagan

av

Handbook of Chemistry & Physics

väntas utkomma under november månad. Pris ca 72: 50.
Förhandsbeställningar kan göras till

LINDSTÅHLS
AB HENRIK LINDSTÅHLS BOKHANDEL
Odengatan 22 - Stockholm Va
Tel. växel 23 44 25

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 15:—, pr häfte kr. 4:25. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Red. och utgivare: fil. dr C. E. Blom, Karlbergsv. 16, Stockholm.

Tidigare årg. Förfråga Eder direkt hos red. Av årg. 1—13 är flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14 (1931) t.o.m. 34 (1951) kr. 10:—, för årg. 35—38 kr. 12:50, för årg. 39 och 40 kr. 15:—.

Pärmar av grön klot à 3:—+25 öre i porto; varje pärm avsedd för två årg.

Problemhäften för åren 1943—52 à kr. 1:20, för 1953—1955 à kr. 1:40, för 1956 och 1957 à 2:20. Innehåll: Student- o. realex.-uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.

Särtryck ur ELEMENTA:

2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 2:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 2:—.
6. S. Comét, Matrisräkning. Slut.
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 2:—.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 2:60.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 2:—.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.
12. Karin Aurivillius, Analysvågen, kr. 2:40.
13. Uno Trägårdh, Primär- och sekundärelement, kr. 2:40.
14. K.-B. Augustinsson, Enzymkemi, kr. 2:60.

Problemhäften och övriga särtryck sändes pr korsband (porto 15 öre) om inbetalning sker till postgiro 527 55, Elementa, Karlbergsvägen 16, Stockholm.

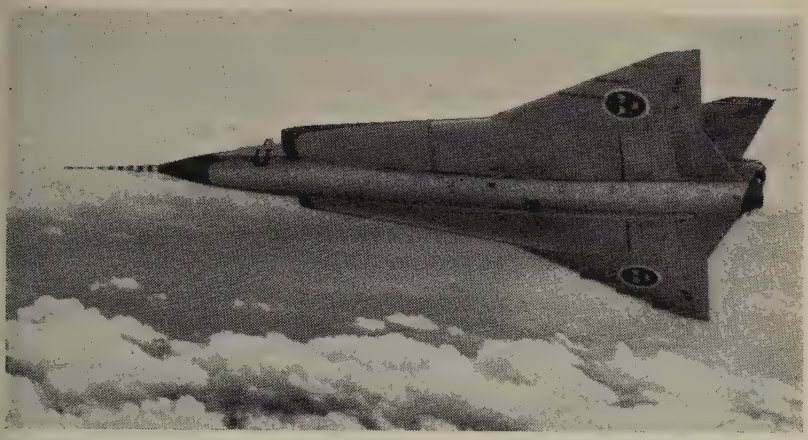


Fig. 2. Jaktflygplan typ Saab J 35 »Draken» för måttlig överljudfart. Prototyp färdig 1955.

av flyghastigheten, om det grundläggande antagandet om att störningshastigheterna är proportionella mot flyghastigheten är uppfyllt.

Nu kan detta antagande väntas vara uppfyllt endast om förhållandet mellan flyghastighet och ljudhastighet hålles konstant, vilket lätt inses ur följande resonemang. När flygplanet rör sig framåt genom luften, åstadkommer det tryckstörningar, vilka utbreder sig ungefär med ljudhastigheten a i förhållande till den stillastående luften (ljudhastigheten bestämmes av luftens temperatur; vid marken är $a=340$ m/s, medan på höjder över 10 km gäller $a=300$ m/s). Om man betraktar utbredningen av en vid tiden $t=-t_1$ utsänd störning, så finner man, att den vid tiden $t=0$ har nått ut till en sfär med radien $=a\,t_1$ och med centrum i den punkt där flygplanet befann sig vid tiden $t=-t_1$. I fig. 3 har sådana utbredningssfärer inritats för störningar utsända med jämna tidsmellanrum utefter flygplanets bana. Tre fall betraktas med olika förhållanden mellan flyghastigheten och ljudhastigheten eller, som man vanligen säger, olika värden på *machtalet*[1]

$$M=\frac{U}{a} \tag{2}$$

Man ser hur starkt utbredningsmönstret beror av machtalet. Speciellt inser man vilken genomgripande skillnad som råder mellan

[1] Uppkallat efter den österrikiske fysikern Ernst Mach (1838—1916), en av de första som studerade överljudströmning.

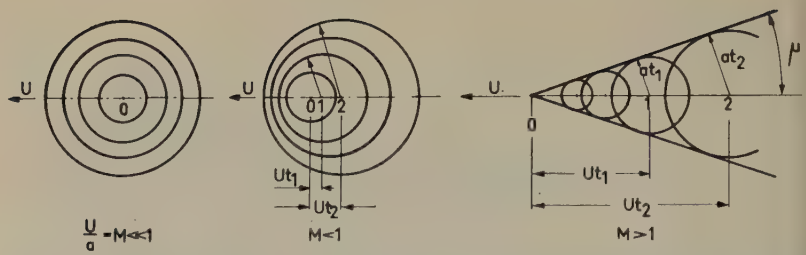


Fig. 3. Hur utbredningen av ett flygplans tryckstörningar beror av flygmachtalet.

underljudfart ($M<1$) och överljudfart ($M>1$). Vid överljudfart når störningarna aldrig framom en kon, *machkonen*, pekande i flygriktningen med spetsen i flygplanet. Störningarna visar i stället en koncentration till området på och omedelbart bakom machkonen. Dennas halva öppningsvinkel, *machvinkeln* μ, är bestämd av sambandet

$$\sin \mu = \frac{1}{M}, \tag{3}$$

såsom framgår av konstruktionen i fig. 3. Från värdet $\mu = 90°$ vid ljudfart, blir machvinkeln allt mindre, ju högre överljudfart man har. Vid underljudfart däremot når störningarna hur långt framom flygplanet som helst, och ju mindre machtalet är, desto likformigare blir utbredningen i alla riktningar. Man har således god anledning vänta, att motståndskoefficienten C_D varierar med machtalet i samma mån, som den beskrivna störningsutbredningen svarar för den med motståndet sammanhängande energiströmmen.

Redan genom dessa enkla överläggningar har vi således kommit till den väsentliga slutsatsen att luftmotståndet är proportionellt mot luftens täthet, hastighetens kvadrat och flygplanets yta, med en proportionalitetskonstant som beror endast av machtalet och flygplanets form. I stället för att studera hur motståndet beror av ϱ, U, S och lufttemperaturen bör vi alltså i fortsättningen kunna inskränka oss till att studera hur C_D beror av M (när vi längre fram betraktar inverkan av luftens inre friktion, måste vi ta hänsyn till ännu en dimensionslös parameter, nämligen Reynolds tal).

D'Alemberts paradox. Vågmotstånd

Vid underljudfart avklingar de av flygplanet orsakade tryckstörningarna starkt med avståndet från flygplanet, i själva verket så starkt, att inget energiutflöde är möjligt. Man kan nämligen visa, att

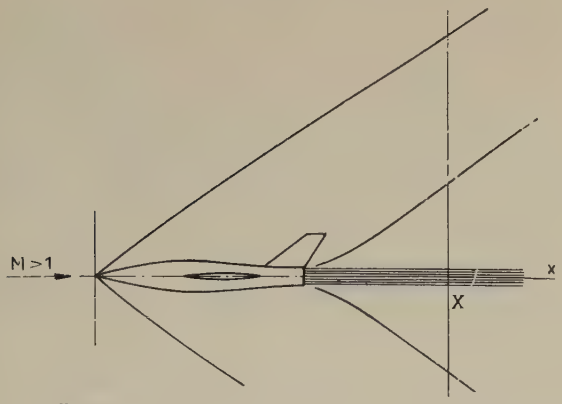


Fig. 4. Överljudströmning med förlig och akterlig stötvåg.

rörelseenergien utanför en sfär kring flygplanet är ändlig. Slutsatsen skulle därför bli, att luftmotstånd saknas vid underljudfart, ett resultat som beträffande $M=0$ framlades redan vid mitten av 1700-talet av d'Alembert. Man talar om *d'Alemberts paradox*, eftersom motståndskoefficienten enligt all erfarenhet ej är noll ens vid de lägsta machtal. Förklaringen ligger i att underljudmotståndet enbart beror på inverkan av luftens inre friktion (viskositet), och den däremot svarande energitransporten sker på annat sätt än det här betraktade. Vi återkommer längre fram till detta.

Vid överljudfart avklingar däremot tryckstörningarna, då man rör sig ut längs en machkon från flygplanet, tillräckligt långsamt för att ett energiutflöde skall äga rum. Detta är inte så förvånande, när man beaktar den i fig. 3 tydliga störningskoncentrationen till machkonens närhet. Fig. 4 ger en detaljrikare bild av störningsfältet kring en flygplanliknande kropp vid överljudfart. Man ser där hur störningarna koncentreras till en förlig och en akterlig *stötvåg*, genom vilka strömningshastigheten diskontinuerligt avlänkas och minskas, samtidigt som trycket, tätheten och temperaturen ökas (vi betraktar här strömningen från ett i förhållande till flygplanet fast koordinatsystem). Dessa stötvågor sträcker sig mycket långt bort från kroppen.[2] Mellan dem ligger ett kontinuerligt störningsområde, där strömningen accelereras från låg hastighet bakom nosstöten till hög hastighet framför den akterliga stötvågen. Framför nosstöten är strömningen helt ostörd. Bakom akterstöten är störningsnivån låg. Stötvågorna är ej machkoner, be-

[2] Trycksprången genom stötvågorna hörs på marken som ett (eller möjligen två) »bang», då ett flygplan passerar med överljudfart.

roende på att tryckstörningarna nära kroppen är för kraftiga för att fortplanta sig exakt med den ostörda luftens ljudhastighet. Ju längre ut från kroppen man går, desto svagare blir emellertid störningarna och desto mindre skiljer sig stötarnas lutningsvinkel från machvinkeln.

Man kan visa, att hastighetsstörningen mellan stötvågorna avklingar proportionellt mot $x^{-3/4}$ med avståndet x från kroppen (se fig. 4), medan avståndet mellan stötarna ökar proportionellt mot $x^{1/4}$. Den totala energien mellan stötarna och framför planet $x=X$ växer därför med X som $X^{3/4}$, dvs. den blir oändligt stor, då man inkluderar hela störningsområdet mellan stötarna. En energiström bort från kroppen kan därför existera vid överljudfart och existerar i själva verket, så fort stötvågor förekommer. Det däremot svarande motståndet kallas *vågmotstånd.*

Studerar man närmare energitransporten från flygplanet utåt mellan stötvågorna, så finner man att rörelseenergi genom luftens stötartade uppbromsning vid passagen genom stötvågorna övergår i värme, vilket av den strömmande luften omedelbart transporteras nedströms. I själva verket avtappas energiströmmen successivt bakåt, när man rör sig utåt mellan stötvågorna, så att den minskar till noll oändligt långt bort från kroppen. Hela energiströmmen har då länkats av bakåt, och stötvågornas styrka har avtagit till noll. Med vågmotståndet följer således en uppvärmning av hela den luftmassa som passerar genom kroppens stötsystem.[3]

Transoniskt motstånd

Vi har alltså sett, att det finns ett motstånd vid överljudfart, även då bidraget från luftens inre friktion försummas, medan inget motstånd förekommer vid låg underljudfart. Frågan är då hur motståndet ökas, då man ökar machtalet från $M=0$ till $M>1$.

Fig. 5 innehåller svaret härpå. I fig. 5 a visas, hur strömningsfältet kan te sig vid hög underljudfart. För att luften skall hinna förbi den förträngning, som kroppen introducerar i strömningen, ökas strömningshastigheten lokalt i trakten av kroppens största tjocklek. Därvid överskrides ljudhastigheten och ett lokalt överljudområde uppstår, avslutat bakåt med en stötvåg. Men stötvågen är, som vi nyss konstaterat, förenad med luftmotstånd; den producerar värme, som transporteras bort av den luft som passerar genom stöten.

Om flyghastigheten är tillräckligt mycket mindre än ljudhastigheten, uppstår inget lokalt överljudområde och alltså inget motstånd.

[3] En mera adekvat beskrivning använder entropibegreppet. Entropien hos luften ökar vid stötpassagen (en irreversibel process). Härav följer, att en kropp alltid möter luftmotstånd, då den ger upphov till stötvågor.

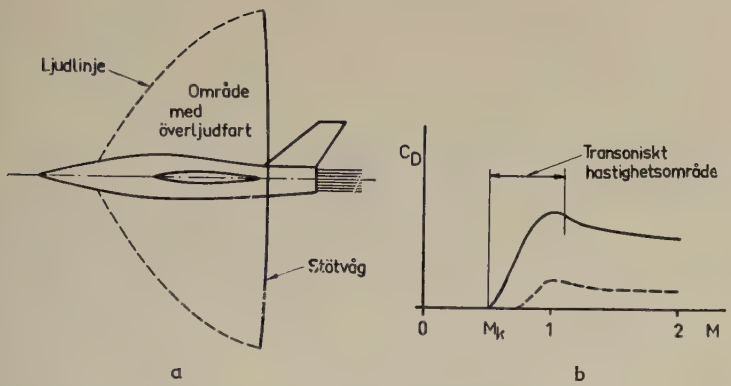


Fig. 5. Transonisk strömning. a. Stötbild vid hög underljudfart ($M_k < M < 1$). b. Vågmotståndets variation med machtalet (den streckade kurvan gäller för ett hälften så tjockt flygplan).

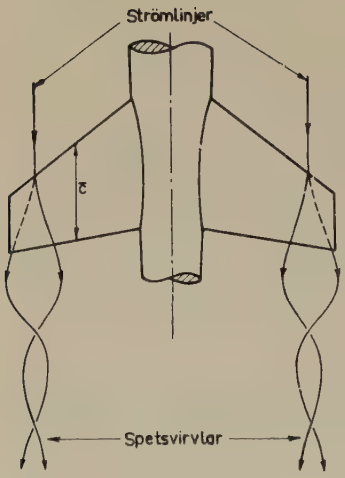
Vid ett visst machtal $M_k < 1$, kallat det kritiska, blir emellertid överljudområdet så stort, att dess stöt ger ett märkbart motstånd. Ökas machtalet över M_k, växer överljudområdet utåt och bakåt från läget för den största tjockleken. Stöten blir då allt större och kraftigare, samtidigt som den flyttar sig bakåt. Därvid ökar motståndet starkt ända tills stöten strax över $M = 1$ kommer till ro vid bakändan, varefter motståndet mjukt närmar sig överljudsidans vågmotstånd (varvid strömningsbilden blir som i fig. 4). Detta motståndsförlopp inom det s. k. *transoniska* hastighetsområdet har skisserats i fig. 5 b.

Den starka ökningen av motståndet inom det transoniska området konstituerar vad som i dagspressen plägar kallas *ljudvallen*.[4] Den förhindrade till för ett fåtal år sedan praktisk flygning vid och över ljudets hastighet (vissa stabilitetsstörningar bidrog också). Numera behärskar man emellertid svårigheterna. Man har reducerat motståndet genom att göra kroppen och vingarna tunnare (den streckade kurvan i fig. 5 b svarar mot ett hälften så tjockt flygplan som den heldragna) och genom att ge dem en effektivare form. Mera härom längre fram.

Virvelmotstånd

Utöver vågmotståndet finns ytterligare en typ av motstånd, som ej beror på luftens inre friktion, nämligen det med lyftkraften sammanhängande *virvelmotståndet.*

[4] Denna benämning utgör en felöversättning av engelskans *sonic wall* men är utan tvekan mera adekvat än den korrekta översättningen.



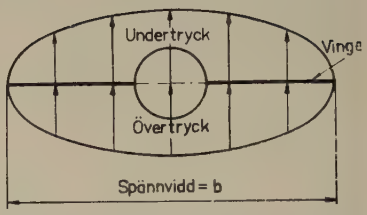


Fig. 6. Tryckvariationen över vingens spännvidd och de därmed sammanhängande spetsvirvlarna.

Större delen av lyftkraften på ett flygplan är lokaliserad till vingen som ett undertryck på dess översida och ett övertryck på dess undersida. Ut mot vingspetsarna sker emellertid en utjämning av tryckskillnaden mellan vingens båda sidor (fig. 6); på själva spetsarna blir tryckskillnaden noll.

Låt oss nu studera en luftpartikel, som följer en strömlinje omedelbart över vingen strax innanför vingspetsen. Den påverkas av en mot flygkroppen riktad tryckkraft, eftersom trycket är högre vid vingspetsen än längre in. Partikeln accelereras därför mot kroppen och lämnar vingbakkanten med ett inåtriktat hastighetstillskott, såsom visas i fig. 6. En partikel, som passerar omedelbart under vingen, bibringas i stället ett utåtriktat hastighetstillskott, såsom de streckade strömlinjerna i fig. 6 visar. När översidans och undersidans partiklar når vingbakkanten strax innanför vingspetsen, har de således olikriktade hastigheter. Denna olikhet i hastighet mellan partiklar, som mötas vid bakkanten efter att ha passerat var sin sida av vingen, kvarstår under en mycket lång sträcka bakom flygplanet (tills luftens inre friktion hinner omsätta rörelseenergien i värme) i form av virvlar från vingspetsarna, såsom antytts i fig. 6.[5] Dessa virvlar transporterar bort energi från flygplanets närhet och sammanhänger således

[5] Virvlarna kan ha nästan oförändrad styrka flera tusen meter bakom flygplanet. De kraftiga virvlarna bakom ett startande eller landande tungt flygplan har visat sig utgöra ett väsentligt riskmoment för lätta flygplan, som startar eller landar strax efteråt.

med ett motstånd på flygplanet, *virvelmotståndet*, även kallat det *inducerade motståndet*.

För att uppskatta virvelmotståndets storlek kan man utgå ifrån att tvärhastigheten vid bakkanten är proportionell mot lyftkraften L, eftersom den är resultatet av acceleration i lyftkraftens tryckfält. Virvelmotståndet bör således vara proportionellt mot kvadraten på lyftkraften. Vid given vingyta och lyftkraft bör vidare tvärhastigheten vara omvänt proportionell mot spännviddens kvadrat, eftersom såväl den accelererande tryckgradienten i spännviddsled som den kordlängd (=vingens utsträckning i strömningsriktningen), över vilken accelerationen sker, är omvänt proportionell mot spännvidden. Den av vingen accelererade luftmängden är emellertid rimligtvis proportionell mot spännviddens kvadrat, varför motståndet, som är proportionellt mot produkten av tvärhastighetens kvadrat och luftmängden, blir omvänt proportionellt mot spännviddens kvadrat. Man väntar sig således, att virvelmotståndets motståndskoefficient kan beräknas ur en dimensionslös formel av typen

$$C_D = K \cdot \frac{C_L^2}{A} \tag{4}$$

där den dimensionslösa lyftkraftskoefficienten C_L är definierad på samma sätt som C_D i ekv. (1), dvs. av

$$L = C_L \cdot \frac{1}{2} \varrho U^2 S \tag{5}$$

och där spännviddens kvadrat mätes med

$$A = \frac{b^2}{S} \tag{6}$$

Vanligen är S vingens yta, och A benämnes då *sidoförhållandet*, eftersom det kan betraktas som förhållandet mellan spännvidden och medelkordan $\bar{c} = S/b$ (se fig. 6).

Argumenteringen för formeln (4) ger vid handen, att den dimensionslösa proportionalitetskonstanten K i första hand beror av formen på lyftkraftens fördelning i spännviddsled och i stort sett bör vara oberoende av fördelningen i kordled eller av machtalet. En närmare analys i enlighet med den s. k. linjära vingteorien[6], vilken förutsätter att vingen är tunn och lätt belastad, bekräftar helt denna förmodan och visar dessutom, att K antar ett minsta värde $K = 1/\pi$, då

[6] Den linjära vingteorien formulerades under första världskriget av Ludwig Prandtl (1875—1953) på basis av idéer av F. W. Lanchester (1878—1946) och andra. Den hade en avgörande betydelse för den flygtekniska aerodynamikens utveckling.

lyftkraften är elliptiskt fördelad över spännvidden. I praktiken avviker lyftkraftsfördelningen sällan märkbart från den elliptiska, frånsett vid kraftiga roderutslag, t. ex. i en sväng, då avvikelserna kan ge märkbara motståndstillskott.

Ekvationerna (4), (5) och (6) kan sammanfattas sålunda:

$$D = K \frac{L^2}{\frac{1}{2} \varrho \, U^2 \, b^2} \tag{7}$$

Virvelmotståndet är således störst, då man flyger långsamt på hög höjd (där lufttätheten är låg). Det kan minskas genom att öka vingens spännvidd och genom att forma vingen så att lyftkraftsfördelningen blir så nära elliptisk som möjligt.

Gränsskiktsmotstånd

Vi kommer nu till *friktionsmotståndet*, vilket beror på att luften har ett visst mått av *inre friktion* eller *viskositet* (denna yttrar sig däri, att skjuvkrafter uppträder mellan på varandra glidande luftskikt). På grund av atomära krafter häftar luften fast vid flygplanets yta. När flygplanet rör sig framåt drar det därför med sig ett tunt lager luft, och detta drar genom friktionen med sig ytterligare luft. Hur stor tjocklek detta s. k. *gränsskikt* av medsläpad luft till slut får, bestämmes av viskositetens storlek. Man kan föreställa sig, att ju större denna är desto mera luft förmår flygplanet dra med sig och desto större blir den energimängd i form av rörelseenergi och värme, som flygplanet lämnar efter sig (ehuru detta är en sanning med modifikation, som vi strax skall se). Därav följer ett med viskositeten ökande motstånd, *gränsskiktsmotståndet*.

För att på enklaste sätt kunna diskutera friktionsmotståndets egenskaper skall vi i första hand betrakta gränsskiktsströmningen förbi ömse sidor av en plan mycket tunn platta, vilken är parallell med flygriktningen. Om luften saknade inre friktion, så skulle en sådan platta inte störa luften, inte lämna någon störningsenergi efter sig och alltså inte utsättas för något motstånd. Nu drar den emellertid med sig luften i ett gränsskikt, såsom visas i fig. 7. Närmast plattan har luften hastigheten U, medan hastigheten går ner till noll vid gränsskiktets ytterkant. Vid bakkanten uppnår gränsskiktstjockleken sitt största värde δ. Om bakkantens längd (vinkelrätt mot papperet) är b, blir den för bildning av båda sidors gränsskikt erforderliga effekten

$$P = k \cdot \varrho \, U^2 \cdot b \cdot \delta \cdot U$$

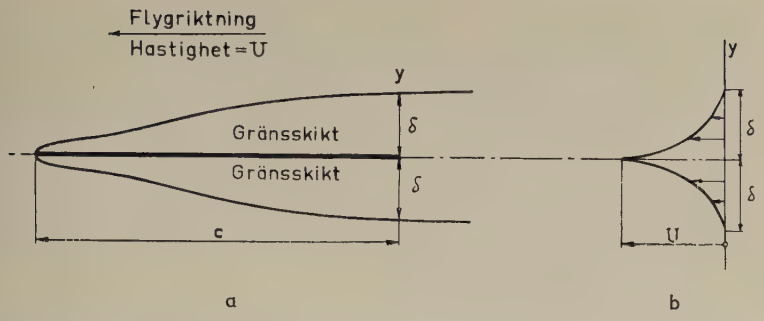


Fig. 7. a. Gränsskikt över tunn platta som rör sig i stillastående luft. b. Den medsläpade luftens hastighetsfördelning vid bakkanten.

där proportionalitetskonstanten k är bestämd enbart av formen hos gränsskiktets hastighetsfördelning vid bakkanten. Eftersom motståndet är $D = P/U$, kan man skriva

$$D = C_f \cdot \frac{1}{2} \varrho \, U^2 \cdot 2 \, b \, c \tag{8}$$

i analogi med ekvation (1), varvid som referensyta S valts den sammanlagda ytan av plattans båda sidor. För den dimensionslösa *friktionskoefficienten* C_f gäller då

$$C_f = k \cdot \frac{\delta}{c} \tag{9}$$

Därmed har vi en formelapparat för beräkning av friktionsmotståndet; den förutsätter emellertid kännedom om de två dimensionslösa storheterna δ/c och k, dvs. om gränsskiktets tjocklek och hastighetsfördelning vid bakkanten.

För att komma vidare är det nödvändigt betrakta gränsskiktsströmningen litet närmare. Först och främst måste vi då skilja mellan två huvudtyper, nämligen *laminär* och *turbulent* strömning.[7] Den laminära utmärker sig därigenom att med plattan parallella luftskikt glider på varandra utan att blandas, medan i den turbulenta en intensiv blandning äger rum genom en kraftigt fluktuerande oregelbunden rörelse hos luften inom gränsskiktet. Samma fenomen kan iakttagas, då man öppnar en vattenkran: då vattnet strömmar långsamt är strålen lugn och klar, då flödet ökar blir den orolig och ogenomskinlig — turbulent.

[7] Här bör Ludwig Prandtl åter nämnas. Han gjorde en banbrytande insats genom att år 1904 införa begreppet gränsskikt och presentera en teori för det laminära gränsskiktet. Denna insats fullföljde han 1914 genom att klarlägga viktiga egenskaper hos det turbulenta gränsskiktet.

Vid laminär strömning är skjuvspänningen τ (kraft/ytenhet) mellan två på varandra glidande skikt direkt proportionell mot hastighetsgradienten (dvs. hastighetsändringen per längdenhet) i riktning vinkelrätt mot skikten. Proportionalitetskonstanten är luftens *viskositetskoefficient* μ med dimensionen kraft · tid/(längd)^2 eller massa/(tid · · längd). Man kan därför gissa, att motståndet D är proportionellt mot $\mu \cdot \frac{U}{\delta} \cdot c\,b$, dvs. $\mu \times$(ett mått på hastighetsgradienten)$\times$(ytan på vilken skjuvspänningen verkar). Kombinerad med ekvationerna (8) och (9) leder denna gissning till ekvationen

$$k_1 \mu \frac{U}{\delta} \cdot c\,b = k \frac{\delta}{c} \cdot \varrho\, U^2\, b\, c$$

där k_1 är en ny dimensionslös proportionalitetskonstant, vilken liksom k beror endast av hastighetsfördelningens form vid bakkanten. Härur kan nu δ/c lösas:

$$\frac{\delta}{c} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k_1}{k} \frac{c \cdot U \varrho}{\mu}}} \tag{10}$$

Man ser att gränsskiktstjockleken relativt plattlängden är omvänt proportionell mot kvadratroten ur den dimensionslösa parametern

$$Re = \frac{c\,U}{\mu/\varrho} \tag{11}$$

välkänd såsom *Reynolds tal*.[8] Dess storlek anger i hur hög grad inverkan av luftens inre friktion är försumbar. I detta fall: ju större Reynolds tal desto tunnare gränsskikt. I princip skulle visserligen även hastighetsfördelningens form och alltså k och k_1 kunna bero av Re, men närmare analys av strömningens rörelseekvationer visar, att så ej är fallet om μ kan betraktas som konstant; alla laminära hastighetsfördelningar på plana plattor är då likformiga och k och k_1 är universella konstanter. Räkningarna ger vid handen att

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta}{c} &\approx \frac{5}{\sqrt{Re}} \\ C_f &= \frac{1{,}328}{\sqrt{Re}} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

och detta resultat har verifierats experimentellt med stor noggrannhet.

När gränsskiktet blir turbulent, ökas dess tjocklek och därmed dess motstånd väsentligt. Detta kan sägas bero på att den turbulenta bland-

[8] Efter Osborn Reynolds (1842—1912), som lade grunden för det experimentella studiet av viskös strömning.

ningen ger de inre luftskikten ett kraftigare grepp om de yttre än som enbart den viskösa skjuvspänningen ger. Därmed är också sagt, att det resonemang som ledde fram till ekvation (10) borde omprövas. Nu finns det emellertid ingen fullständig teori för turbulenta gränsskikt,[9] och man är således hänvisad till experimentella data. Därvid kan man förutsätta att C_f och δ/c fortfarande är entydigt bestämda av värdet på Reynolds tal; detta kan visas med dimensionsanalys. Man behöver således inte variera l, U och ϱ oberoende av varandra vid experimenten, endast Re. Man behöver inte ens använda luft; vilket annat medium som helst med en välbestämd viskositetskoefficient, t. ex. vatten, duger. Som en sammanfattning av många oberoende motståndsbestämningar för turbulenta gränsskikt på plan platta kan följande formel anges för motståndskoefficienten:

$$C_f = \frac{0{,}075}{(^{10}\log Re - 2)^2} \tag{13}$$

I kombination härmed kan formel (9) användas för en uppskattning av gränsskiktstjockleken genom att sätta $k = 5{,}1$. Även i det turbulenta fallet minskar således friktionskoefficienten och den relativa gränsskiktstjockleken med ökande Reynolds tal.

När vi nu har fått klart för oss de skilda egenskaperna hos de två typerna av gränsskiktsströmning, så är nästa steg att diskutera under vilka förhållanden den ena och den andra typen förekommer. Huvudregeln är att strömningen är laminär vid låga värden på Reynolds tal och turbulent vid höga (liksom i exemplet med vattenkranen!). Situationen kan beskrivas så, att den inre friktionen förmår dämpa ut turbulenta fluktuationer då Re är litet, medan friktionen med ökande Re får allt mindre betydelse, så att den till slut inte räcker till för att hålla tillbaka turbulensen.[10] Detta innebär naturligtvis, att den främre delen av plattans gränsskikt alltid är laminärt, medan omslag till tur-

[9] Det finns en mycket omfattande teoretisk lärobyggnad för turbulenta gränsskikt, men den är ofullständig i så måtto, att den måste kompletteras med experimentella data för att ge användbara beräkningsmetoder. De grundläggande insatserna på detta område gjordes av THEODORE VON KÁRMÁN på 1920-talet. Turbulensen utgör överhuvudtaget ett av de mest svårbemästrade problemkomplexen inom hydrodynamiken. Inte ens för de enklaste formerna av turbulens har man en någorlunda fullständig teori, trots att en av G. I. TAYLOR 1935 påbörjad statistisk turbulensteori växt ut till en lärobyggnad av imponerande mått och lett till en ytterligt förfinad mätteknik för turbulenta strömningsfält.

[10] Redan tidigt framkom hypotesen att ett laminärt gränsskikt är instabilt för infinitesimala störningar så snart Reynolds tal överskrider ett bestämt värde, och den bekräftades 1929 genom teoretisk analys av W. TOLLMIEN. Under lång tid misslyckades man emellertid att finna en experimentell verifiering, och först 1943, sedan förfinade beräkningar av H. SCHLICH-

bulent strömning sker först efter en sträcka vars Reynolds tal är så stort, att laminär strömning ej längre är möjlig.

Emellertid sker omslaget ej vid ett bestämt värde på Re; andra faktorer är också av betydelse. Hit hör först och främst plattans ytfinhet: ju råare plattan är vid desto lägre Re sker omslaget. Vidare kan oundvikliga fluktuationer hos strömningen utanför gränsskiktet bidraga till att sänka Re för omslag, och liknande inverkan har ljudvågor och plattvibrationer. Sammanfattningsvis kan sägas, att det fordras mycket kraftiga yttre störningar för att få omslag så tidigt som vid $Re=3\cdot10^5$ och mycket omsorgsfull störningseliminering för att skjuta det till ett så högt värde som $Re=10^7$.

Det är nu hög tid att vi skaffar oss en uppfattning om storleksordningen av de betraktade kvantiteterna. Säg att vi har $Re=10^7$, ett Reynolds tal där gränsskiktet övervägande är turbulent men där det under gynnsamma betingelser kan vara till väsentlig del laminärt. För luft vid marken har man $\mu/\varrho=15\cdot10^{-6}$ m²/s, varför det valda värdet för Re ger $U\cdot c=150$ m²/s. Låt oss tolka detta som gällande ett mindre flygplan ($c=2$ m) med den måttliga flyghastigheten $U=75$ m/s ($M<0{,}4$). För laminärt gränsskikt erhålles $C_f=0{,}0004$ *och* $\delta/c=0{,}0035$ (dvs. $\delta=7$ mm för $c=2$ m), medan motsvarande data i det turbulenta fallet blir $C_f=0{,}003$ och $\delta/c=0{,}015$ ($\delta=30$ mm). Omräknat till skjuvkraft per ytenhet enligt formel (8) är motstånden 0,054 kp/m² respektive 0,4 kp/m², således i båda fallen ganska måttliga krafter. Det anmärkningsvärda är emellertid att det turbulenta motståndet är 8 ggr så stort som det laminära. Man bör således kunna göra en mycket väsentlig motståndsvinst genom att utforma ett flygplans vinge så, att det laminära gränsskiktet bevaras över så stor del av vingen som möjligt. Vid det här aktuella Re-värdet är en sådan vinst nätt och jämnt praktiskt möjlig. Vid lägre värden är det ingen svårighet att göra avsevärda vinster, medan vid högre gränsskiktet till sin övervägande del säkert är turbulent.[11] På snabba transport- och krigsflygplan är

TING bekräftat Tollmiens resultat, rapporterade H. L. DRYDEN att hans medarbetare G. B. SCHUBAUER och H. K. SKRAMSTAD vid National Bureau of Standards i Washington funnit, att det förutsagda fenomenet kan iaktagas om man reducerar ytterströmningens fluktuationsnivå tillräckligt långt. Denna samstämmiga teoretiska och experimentella bekräftelse av instabilitetshypotesen måste betraktas som en av de främsta forskarbragderna inom den moderna hydrodynamiken. I praktiken är dock åtskilliga andra fenomen delaktiga i omslagsprocessen från laminär till turbulent gränsskiktsströmning.

[11] Laboratoriemässigt kan man genom kontinuerlig bortsugning av den inre delen av gränsskiktet, t. ex. genom porositeter i ytan, behålla laminär strömning till väsentligt högre värden än $Re=10^7$. Trots de stora potentiella motståndsvinsterna har de praktiska svårigheterna med en sådan metod hittills hindrat tillämpning på flygplan.

därför gränsskiktet praktiskt taget helt turbulent, medan å andra sidan segelflygplan genom omsorgsfull ytbehandling kan ges mycket lågt friktionsmotstånd. Man inser vidare, att i den lägre delen av det för flygplan aktuella *Re*-området kan det abnorma förhållandet råda att C_f ökar med *Re*.

Med den sist förda diskussionen har vi föregripit svaret på frågan om i vad mån resultat för gränsskiktsströmning över en plan platta i inkompressibel strömning är tillämpbart på flygplan och vid höga machtal. Moderna flygplan för höga hastigheter har tunna vingar och slanka kroppar, så att gränsskiktsströmningen i själva verket mycket liknar plattströmningen — åtminstone vid flygplanets högsta fart, då anfallsvinkeln (=vinkeln mellan vingplan och flygriktning) är liten. Det visar sig vidare, att inverkan av luftens kompressibilitet på friktionsmotståndet är mycket liten upp till låga överljudmachtal. Man får då en god uppfattning om friktionsmotståndet t. ex. genom att för vinge, kropp och stabiliseringsytor var för sig räkna ut ungefärliga värden på *Re* samt bestämma tillhörande motstånd ur ovan givna formler. (En väsentlig svårighet vid lägre värden på *Re* är därvid att förutsäga omslagspunktens läge; känner man den, kan formlerna för laminärt och turbulent motstånd tillämpas var för sig på ytans laminära resp. turbulenta del.) Vid högre överljudmachtal sjunker motståndet ganska mycket genom att värmeutvecklingen i gränsskiktet avsevärt sänker tätheten hos luften närmast ytan.

Slutligen bör påpekas, att de givna motståndsformlerna gäller för glatt yta, medan i praktiken ytråheten kan ge avsevärda motståndstillskott. Detta gäller även då man driver ytfinheten så långt som praktiska krav tillåter. I själva verket ger på ett snabbt flygplan redan ytojämnheter av höjden 0,01 mm ett märkbart motståndstillskott.

Utblick

Därmed har vi fått en uppfattning om de tre viktigaste typerna av luftmotstånd: vågmotståndet, virvelmotståndet och gränsskiktsmotståndet. Denna klassificering efter mekanismen för energitransporten bort från flygplanet ger vid handen, att vågmotstånd förekommer endast vid hög underljudfart och överljudfart, att virvelmotståndet intimt sammanhänger med lyftkraften och att gränsskiktsmotståndet uppträder vid alla machtal och flygtillstånd.

Det finns emellertid även andra klassificeringsgrunder som kan ge insikter om luftmotståndets natur; sådana skall behandlas i en följande del av denna uppsats.

Om magiska rektanglar

Av byrådirektör Jakob Lundström, Stockholm

Med en s. k. magisk kvadrat menas i allmänhet en uppställning av de n^2 första naturliga talen i n rader och n kolumner så, att summan av talen i varje rad och kolumn är densamma, dvs. $\frac{1}{2}n(n^2+1)$, och att även summan av talen i de två diagonalerna har detta värde.

Jag uppställer nu problemet att ordna talen i form av en rektangel, dvs. anordna de $m \cdot n$ första naturliga talen i n rader och m kolumner så, att summan av talen i varje rad är S/n och i varje kolumn S/m, om summan av samtliga tal är $S=\frac{1}{2}mn(mn+1)$. Då S skall vara delbart med både m och n, måste m och n antingen båda vara udda eller båda jämna. Dessutom skall naturligtvis båda vara större än 1. Den minsta rektangel, som uppfyller dessa villkor (dvs. den som har minsta antalet siffror), är den, som bildas av $2 \cdot 4$ tal, den näst minsta har $2 \cdot 6$ tal och den som kommer därnäst $3 \cdot 5$ tal. Lösningar till de båda första är lätt att finna, exempelvis

1	7	6	4	resp.		1	11	3	9	8	7
8	2	3	5			12	2	10	4	5	6

Det är naturligtvis likgiltigt om rektanglarna anordnas liggande eller stående.

Vi övergår nu till nästa rektangel och söker sålunda lösningar till problemet att ordna talen 1, 2, ..., 15 i en matris med 5 rader och 3 kolumner, så att summan av talen i varje rad är 24 och i varje kolumn 40. Man har nämligen att $S=5 \cdot 24=3 \cdot 40$.

För att förenkla räkningarna omtransformerar man sifferföljden $1, 2, \ldots, 15$ på så sätt, att varje tal minskas med 8; generellt minskas varje tal med $\frac{1}{2}(mn+1)$. Då blir villkoret, att summan av talen i en godtycklig såväl rad som kolumn är 0.

Det synes i detta fall enklast att utgå från de olika möjligheterna att, utan hänsyn till talens ordningsföljd, av talen $-7, \ldots, 7$ bilda rader om 3 olika tal, vars summa är 0. Följande möjligheter finnes, och dessa har uppdelats i 5 grupper:

	I	II	III	IV	V
a	−1 −2 3	1 2 −3	−2 −3 5	2 3 −5	$-k$ 0 k
b	−1 −3 4	1 3 −4	−2 −4 6	2 4 −6	($k=1, 2, \ldots, 7$)
c	−1 −4 5	1 4 −5	−2 −5 7	2 5 −7	
d	−1 −5 6	1 5 −6	−3 −4 7	3 4 −7	
e	−1 −6 7	1 6 −7			

Vi kan kalla en rad om 3 tal för en *triplett*. Om III d eller IV d ej medtages, måste man välja en triplett från var och en av grupperna för att få med 0 och ej få med något av talen 0, ± 1, ± 2 mer än en gång. Men detta gäller även om III d eller IV d medtages, enär dessa har ett tal gemensamt med varje annan triplett inom sin grupp. Lätt inses nu, att i grupp V är tripletten -1, 0, 1 ej användbar.

Vid en genomgång av de möjligheter, som kan ge resultat, börjar man lämpligen med grupperna III och IV (vilket är bäst, då de har färre tripletter) och väljer två tripletter, som har samma siffror men med motsatta tecken. Då måste även tripletterna från grupperna I och II bilda ett dylikt par, för att de återstående talen skall passa för grupp V. Väljer man III b och IV b finns ej något triplettpar i I och II, som är fritt från talen 2, 4, 6, men för de övriga i III och IV erhålles kombinationerna

$$\mp 2,\ \mp 3,\ \pm 5 \qquad \mp 1,\ \mp 6,\ \pm 7 \qquad -4,\ 0,\ 4 \qquad (1)$$
$$\mp 2,\ \mp 5,\ \pm 7 \qquad \mp 1,\ \mp 3,\ \pm 4 \qquad -6,\ 0,\ 6 \qquad (2)$$
$$\mp 3,\ \mp 4,\ \pm 7 \qquad \mp 1,\ \mp 5,\ \pm 6 \qquad -2,\ 0,\ 2 \qquad (3)$$

Nu övergår man till att välja tripletter från III och IV, som ej tillhör samma par. Väljes III a och IV b, måste tripletterna från I och II jämte -1 och 1 innehålla talen 3, -5, -4, 6. Enda möjliga kombinationen blir då

$$-2,\ -3,\ 5 \qquad 2,\ 4,\ -6 \qquad -1,\ -5,\ 6 \qquad 1,\ 3,\ -4 \qquad -7,\ 0,\ 7 \qquad (4)$$

Man kan ej välja III a och IV c, ty de har båda talet 5. Men III b och IV c ger

$$-2,\ -4,\ 6 \qquad 2,\ 5,\ -7 \qquad -1,\ -6,\ 7 \qquad 1,\ 4,\ -5 \qquad -3,\ 0,\ 3 \qquad (5)$$

Väljes slutligen III d, ingår 1 och 2 i tripletterna från II och IV, varför -1, -2, 3 måste väljas i I. Vidare har man endast två tripletter med -7, nämligen II e och IV c. Man får därför

$$-3,\ -4,\ 7 \qquad -1,\ -2,\ 3 \qquad 1,\ 6,\ -7 \qquad 2,\ 4,\ -6 \qquad -5,\ 0,\ 5 \qquad (6)$$

och

$$-3,\ -4,\ 7 \qquad -1,\ -2,\ 3 \qquad 2,\ 5,\ -7 \qquad 1,\ 4,\ -5 \qquad -6,\ 0,\ 6 \qquad (7)$$

Lätt inses att, om man i (4) — (7) byter tecken för alla tal, får man 4 nya kombinationer.

Nu gäller det att ordna talen i varje triplett så, att summorna i kolumnerna blir 0. Denna undersökning kan lämpligen företagas på följande sätt: För en uppställning enligt vidstående schema bildas summorna a_i+b_j och c_p+d_q $(i, j, p, q=1, 2, 3)$. Man ser sedan efter om summan av något a_i+b_j och något c_p+d_q blir 0, k eller $-k$. Då duger motsvarande tal till resp. 2:a, 1:a och 3:e kolumnen. Exempelvis ger uppställningen enligt kombination (4)

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ -k & 0 & k \end{array}$$

−2	−3	5	summorna	a_i+b_j			och	c_p+d_q			
2	4	−6									
−1	−5	6		0	2	−8		0	2	−5	
1	3	−4		−1	1	−9		−4	−2	−9	
−7	0	7		7	9	−1		7	9	2	

där i och p bestämmer rad och j och q kolumn i de 9-siffriga kvadratiska matriserna. Väljes 9 i 1:a och −9 i 2:a matrisen, blir summan 0. Nu är rad 3 och kolumn 2 i första matrisen »blockerade», eftersom 5 i 1:a raden och 4 i 2:a är tagna. Detsamma gäller rad 2 och kolumn 3 i den 2:a matrisen. Av de återstående 4 talen i vardera matrisen ger 0 och 7 summan 7 och −9 och 2 summan −7. På samma sätt erhålles ur de båda matriserna tre andra möjligheter, så att följande 4 fall ger lösningar, nämligen;

1)	9	och	−9,	0	och	7,	−9 och 2
2)	−9	och	9,	7	och	0,	2 och −9
3)	2	och	−2,	7	och	0,	−9 och 2
4)	0	och	0,	9	och	−2,	−9 och 2

Motsvarande tal till dessa värden på a_i+b_j och c_p+d_q ger rektanglarna

−2	5	−3	5	−3	−2	5	−2	−3	5	−2	−3
2	4	−6	2	−6	4	2	4	−6	4	2	−6
6	−5	−1	−1	6	−5	−1	−5	6	−5	−1	6
1	−4	3	1	3	−4	1	3	−4	3	1	−4
−7	0	7	−7	0	7	−7	0	7	−7	0	7

Ökas alla tal med 8, erhålles den slutgiltiga formen:

6	13	5	13	5	6	13	6	5	13	6	5
10	12	2	10	2	12	10	12	2	12	10	2
14	3	7	7	14	3	7	3	14	3	7	14
9	4	11	9	11	4	9	11	4	11	9	4
1	8	15	1	8	15	1	8	15	1	8	15

Genom teckenbyte i de 4 första rektanglarna erhålles 4 ytterligare lösningar. Den slutliga formen på dessa kan även fås direkt av de 4 sistnämnda genom att varje tal ersättes med 16 minskat med detta tal. Varje rektangel kan dessutom förändras genom permutation av såväl rader som kolumner utan att den önskade egenskapen går förlorad. Vi kan anse var och en av de 4 nyss angivna rektanglarna som representant för en viss *typ* av lösning. Utan förändring av typen kan man då dels permutera rader och kolumner godtyckligt, dels omtransformera varje rektangel genom att varje tal ersättes med 16 minskat med talet. Härigenom kommer varje typ att omfatta 3!5!2 olika anordningar av talen. Emellertid torde man vid beräkning av antalet olika

rektanglar böra anse dem som lika, som erhållits genom vridning $\frac{1}{2}$ varv eller genom spegling. Antalet olika lösningar av en viss typ vid kombinationerna (4)—(7) är då $3!\,5!\,2/4=360$.

På samma sätt som vid (4) erhålles vid kombination (5) rektanglarna

4	6	14		6	4	14		6	4	14		14	4	6		6	14	4
13	10	1		13	10	1		13	1	10		10	1	13		10	13	1
15	7	2		7	15	2		7	15	2		2	15	7		7	2	15
3	9	12		9	3	12		9	12	3		9	12	3		12	3	9
5	8	11		5	8	11		5	8	11		5	8	11		5	8	11

Vid kombination (6) erhålles rektanglarna

15	5	4		15	4	5		15	4	5		5	15	4		4	15	5	
11	6	7		6	7	11		11	7	6		11	6	7		7	6	11	
1	9	14		14	9	1		1	9	14		9	1	14		14	1	9	
10	12	2		2	12	10		10	12	2		12	10	2		12	10	2	
3	8	13		3	8	13		3	8	13		3	8	13		3	8	13	

och vid kombination (7)

5	15	4		5	4	15		5	4	15		15	4	5					
11	7	6		11	6	7		11	6	7		7	6	11					
10	1	13		13	10	1		10	13	1		13	10	1					
12	9	3		9	12	3		12	9	3		3	12	9					
2	8	14		2	8	14		2	8	14		2	8	14					

Av kombinationerna (1)—(3) erhålles endast vid (1) en lösning, nämligen nedanstående. Denna typ har dock endast 180 olika rektanglar. Allt som allt har man alltså 19 typer med vardera 360 och en typ med 180 rektanglar dvs. totalt *7020* olika rektanglar.

11	3	10
6	13	5
9	1	14
2	15	7
12	8	4

Man kan fråga sig, om bland de ovan angivna rektanglarna de finnes, där även summan av talen i diagonalerna till de i rektanglarna ingående kvadraterna med 9 tal har värdet 24. Enligt en av Lektor Agne Wahlgren gjord utredning saknas dock sådana s. k. panmagiska rektanglar med $3 \cdot 5$ tal. Däremot har han funnit, att om man inskränker sig till att mittkvadratens diagonaler skall ha summan 24, kan man gå tillväga på följande sätt. Man ser efter om i två kolumner differensen mellan de båda talen i samma rad är lika för två par. Exempelvis finner man i den första till (5) hörande rektangeln $12-9=11-8 \therefore 12+8=9+11=20$. Dessa fyra tal blir kvadratens hörn. Talet i diagonalernas skärningspunkt skall vara $24-20=4$. Härtill kommer villkoret, att detta tal skall befinna sig i den återstående kolumnen. Genom permutation av rader och kolumner bringas dessa tal på sina platser. På detta sätt erhålles rektanglarna

10	13	1		14	6	4		15	5	4		9	1	14		11	3	10
9	3	12		9	3	12		1	13	10		11	3	10		9	1	14
6	4	14		2	7	15		7	11	6		12	8	4		12	8	4
8	5	11		5	11	8		3	9	12		6	13	5		2	15	7
7	15	2		10	13	1		14	2	8		2	15	7		6	13	5

I den tredje av dessa blir summan 24 även i de båda diagonaler, som utgår från talet 7. Om man i de tre första gör utbytet $a \rightarrow 16-a$, får man tre nya rektanglar. Men de båda sista övergår i sig själva, beroende på att de erhållits ur kombinationen (1). Slutligen kan man i varje rektangel låta 1:a och 5:e raden byta plats, varigenom hela antalet rektanglar av detta slag blir 16.

Jag ber slutligen att få tacka lektor Wahlgren för värdefulla råd vid uppsatsens utarbetande.

Notiser

9^{9^9} är ju det största tal som med gängse konventioner kan skrivas med tre siffror. Det är lätt nog att se vad dess sista siffra är, men början av talet kommer man inte lika lätt åt. Vanligen tillgängliga logaritmtabeller räcker inte ens för att exakt räkna ut hur många siffror talet har. Emellertid har log 3 beräknats med 230 decimaler [1] av vilka de 40 första återges nedan. Vi får

$$\log 9^{9^9} = 9^9 \times 2 \times 0{,}47712\ 12547\ 19662\ 43729\ 50279\ 03255\ 11530\ 92001 =$$
$$= 369\,693\,099{,}63157\ 03587\ 43543\ 09509\ 54829$$

Lustigt nog är alltså antalet siffror i talet ett jämnt hundratal. Med en 23-ställig logaritmtabell [2] får man de första siffrorna i talet:

$$9^{9^9} = 42812\ 47731\ 75747\ 04803\ 69_8 \ldots\ldots\ 26271\ 77289$$

De sista siffrorna beräknas lätt med räknemaskin. Lämpligen beräknar man först värdena på de nio talen $9^k \cdot 10^n$, där k är de olika siffrorna i talet $9^9 = 387\,420\,489$.

Vid utförandet av denna räkning lägger man märke till att 9^{10^n} slutar på $\ldots 4400 \ldots 001$, där antalet nollor just är n. Att detta gäller generellt (då $n > 0$) kan man visa på följande sätt:

Utveckla $(10-1)^{10^n}$ i serie. Allmänna termen blir $\binom{10^n}{k} 10^k$, som

[1] H. S. Uhler, Proc. Nat. Acad. Sci. 24 (1938) 28.
[2] G. W. Spenceley, R. M. Spenceley och E. R. Epperson, Smithsonian Logarithmic Tables, Washington 1952.

också kan skrivas $10^n\binom{10^n-1}{k-1}\frac{10^k}{k}$. Eftersom binomialkoefficienterna är hela tal, kommer det ifråga att förkorta k mot tiopotenser endast då $k=2^p \cdot 5^q$. Vid förkortningen konsumeras tiopotenser till ett antal r lika med det största av talen p och q. För att allmänna termen ej skall kunna ge något bidrag till de ovan angivna slutsiffrorna, måste den ha kvar $n+3$ tiopotenser. Således måste $3+r \leqq k$. Man finner genast att detta alltid gäller, utom då $q=0$ och $p=0$, 1 eller 2, motsvarande $k=1$, 2 eller 4. Dessa tre termer i serien beräknas nu ge bl. a. bidragen $(50—5—1) \cdot 10^{n+1}$, vilket just ger de ovan angivna siffrorna 44, varjämte seriens nollte term ger 1.

Hela talet kan inte återges här. Tryckt på samma sätt som början och slutet här ovan skulle det nämligen fylla upp ca 500 årgångar av Elementa, utgörande ungefär 7 hyllmeter. Tryckes det på en remsa skulle den bli 612 km lång och räcka från Malmö till Gävle. Skrives talet med decimeterbreda siffror räcker det jorden runt.

Arne Ölander

Kvicksilverspektrum

Av följande två försök är det första tänkt som laboration i gymnasiet, det andra som demonstration.

En spektrograf med förvånansvärd upplösningsförmåga kan byggas med de enkla linser, som ingår i t. ex. Gumperts eller Norstedts laborationssatser. De båda gula linjerna i kvicksilverspektrum är åtskilda, och den kraftiga linjen 3650 Å i ultraviolett visar sig bestå av två eller till och med tre linjer. Till försöket behövs en vanlig kvicksilverlampa på 80 W med klart glas (kostar ca 35 kr; har man endast tillgång till lampor med matt glas, får man spränga av kolven). Denna inkopplas till 220 V växelström i serie med en speciell drossel (en Leybold-transformator med 1000-varvspole kan användas) eller ett motstånd på 160 ohm. Lampan bör helst placeras i ett lamphus, som avskärmar ströljus och som kan placeras på den optiska bänken (finns att köpa, om man ej vill göra det själv).

På en optisk bänk uppställes från ena änden räknat ett prismabord, några cm därifrån en lins ($f=30$ cm), i linsens fokus en reglerbar spalt, därefter en lins ($f=5$ cm) och slutligen kvicksilverlampan. Kvicksilverljusbågen avbildas av 5-cm-linsen på spalten. Se efter att ljusknippet som går igenom spalten är väl »fyllt» med ljus! Det syns på 30-cm-linsens fattning eller på ett papper, som man håller i ljusknippet. Är knippet ej fyllt, har man bara fokuserat randstrålarna på spalten. 30-cm-linsen, som bör vara försedd med bländare på ca 2 cm, injusteras, så att det utgående ljuset blir parallellt. Därvid får man ej nöja sig med att avbilda spalten på en avlägsen vägg. Man kan ej anse avståndet bort till väggen vara »oändligheten», då ju linsen har

ganska stor brännvidd. På den avlägsna väggen skall man i stället se en ljusstrimma, som är lika bred som linsen (=bländaren), om spalten är smal.

På prismabordet ställer man nu ett litet flintglasprisma och vrider detta, så att ljuset passerar under minimideviation (håll ett papper en bit bakom!). Kontrollera också, att ljuset inte till stor del passerar över eller vid sidan av prismat. Slutligen skall ljuset brytas samman av en andra 30-cm-lins till en skärm. (Till såväl Gumperts som Norstedts satser finns leder med gradskivor för hopkoppling av två optiska bänkar, men man kan mycket väl placera linsen och skärmen på en andra lös bänk eller helt enkelt i två vanliga stativ.) Se till att ljuset går genom linsens mitt. Skärmen bör ställas något snett mot ljusriktningen, eftersom violett ljus bryts kraftigare än rött.

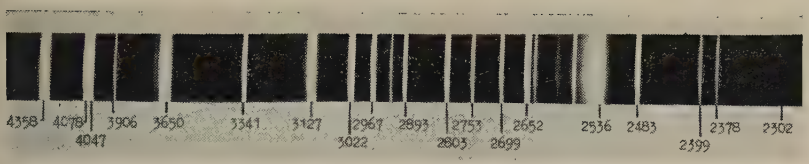
Skärmen bör ha en yta, som ej fluorescerar. Vanligt papper duger alltså ej, eftersom man då dels får med ultravioletta linjer och dels får fel färg på de violetta. En ypperlig yta får man genom att stryka en stadig kartongskiva eller masonitskiva med benvit »Spred» nr 85. Nederdelen av skivan målas sedan med gul lysfärg. Man kan nu få linjerna att delvis ligga på lysfärgen och ser då även de ultravioletta linjerna ned till 3341 Å.

Upplösningen bör nu vara god. De gula linjerna ligger emellertid tätt, och det kan vara klokt att använda en 10-cm-lins som lupp, när man ser på dem. (Om man vill ha ett mer utbrett spektrum, kan man välja en lins med större brännvidd i stället för den sista 30-cm-linsen.) Då man betraktar de svagare linjerna, bör man givetvis öppna spalten något.

Med denna uppställning kan man lätt visa några absorptionsspektra. Man byter då ut kvicksilverlampan mot en glödlampa u t a n a t t r u b b a n å g o t a n n a t. Kontrollera att ljusknippet som går ut ur spalten är väl fyllt — justera annars lampans läge. Inför en bägare på 100 cm^3 i ljuset mellan lampan och spalten och fyll bägaren med NO_2 (en kopparbit på botten+några droppar konc. salpetersyra; täck bägaren med ett urglas). Eller håll en bunsenlåga i ljusvägen i stället för bägaren och inför i lågans nedre del änden av ett hoprullat filtrerpapper, doppat i en gröt av koksalt och vatten.

Man kan också lätt visa spektralfärgernas återförening till vitt ljus, om man tar bort bildskärmen och strax bakom dennas plats inför en lins, som får avbilda prismaytan. För man in ett prisma med liten brytande vinkel i en del av spektrum, kan man på vanligt sätt få uppdelning i komplementfärger.

Då man använder glasoptik, får man endast med ett fåtal ultravioletta linjer. Vid d e m o n s t r a t i o n kan man använda kvartsoptik och kan då förenkla uppställningen, givetvis på bekostnad av upplös-



Kvicksilverspektrum (våglängder i Å).

ningen. Kvicksilverlampan, vars glaskolv man sprängt av ett par cm från gängan med en glödande tråd eller med en glaspärla, placeras omedelbart intill spalten. En kvartslins (exempelvis $f=20$ cm) får avbilda spalten på någon meters avstånd. Ett kvartsprisma strax efter linsen avlänkar och uppdelar ljuset. Skärmen — med lysfärg — måste placeras ganska snett. I den bifogade bilden (där de gula och gröna linjerna ej är med) visas det spektrum man erhåller. Det är ganska linjerikt och lämpar sig därför för undersökningar av olika ämnens genomsläpplighet i ultraviolett. Man kan exempelvis undersöka solglasögon, ett försök som enbart det rättfärdigar inköpet av prismat (ca 170 kr) och linsen (ca 50 kr).

Bengt Liljeqvist

En rättvänd bild på näthinnan uppfattas som omvänd

På en kartongbit fastlimmas en kork av 2 à 2,5 cm höjd. I denna intryckes en vanlig knappnål nära den fria änden. Mittför nålens huvud göres med en knappnål ett hål i skivan. På korkens fria ände fastlimmas en mindre pappskiva med ett hål av ca 0,5 cm diameter i höjd med nålens huvud. Apparaten riktas mot himlen eller en lampa och ögat hålles omedelbart intill det större hålet. En rättvänd mörk skuggbild erhålles på näthinnan, men den uppfattas som omvänd. Ser man i stället genom det lilla hålet, erhålles en omvänd bild på näthinnan (camera obscura), — men den uppfattas som rättvänd.

Hj. Trane

Elektrolytiska elmätare

Elektrolytiska kilowattimmätare av Siemens fabrikat (till principen amperetimmätare med kilowattimskala, anpassad till viss bestämd spänning) ha tidigare i avsevärd omfattning använts i svenska städer med likströmsnät. De förekomma ännu i åtminstone Göteborg och Gävle, men de torde inom en nära framtid komma att kasseras i samband med förestående omläggning. Tillverkningen torde också komma att nedläggas.

De intressanta apparaternas centrala del utgöres av en helt sluten U-formad elektrolyscell av glas, innehållande fosforsyrelösning. Genom en mycket sinnrik utformning fungera de båda elektroderna såsom nära ideala väteelektroder. Polarisationsspänningen mellan elektroderna är härigenom i det närmaste eliminerad, och cellen har inom ett mätområde från omkring 100 mikroampere och ned till några procent därav ett nära konstant effektivt motstånd av omkring 100 ohm. Dessa egenskaper äro en förutsättning för att cellen genom shuntkoppling skall kunna anpassas för olika mätområden. I mätaren är cellen dessutom försedd med förkopplingsmotstånd. Båda elektroderna äro försedda med väteadsorberande beläggning. Katoden har klockform och anoden utgöres av en cylinder, vars övre del når upp i anodskänkelns vätgasfyllda rum. Vid den senare elektroden sker ingen syrgasutveckling. I stället bindes väte, som i jonform passerar elektrolyten och såsom gas fälls ut vid katoden samt därefter uppsamlas i den såsom mätrör utformade katodskänkeln. Genom de nämnda anordningarna får förloppet reversibel karaktär, och mätaren återföres lätt i nolläge genom lutning av cellen.

Som en kuriositet kan nämnas, att den frikopplade mätcellen kan drivas av en kristallmottagare. Vid ett sådant prov i Bromma erhölls genom mätcellen en strömstyrka av omkring 20 mikroampere, och härvid genomfördes således elektrolysförloppet med energi från Nackasändarens högfrekvensfält.

Med hänsyn till mätarnas användbarhet inom experiment- och undervisningsverksamhet synes det angeläget att de tillvaratagas medan de ännu finnas att tillgå. AB P. A. Norstedt & Söners Skolmaterielavdelning har lovat hjälpa dem som ha intresse för apparaterna med anskaffningen.

Literatur:

K. Kessler/W. v. Krukowski, Der Wasserstoff-Elektrolytzähler der Siemens-Schuckertwerke, Elektrotechn. Zeitschrift (1925, Heft 35), 3.
Malte Nilsson, Erfarenheter med elektrolytmätare, Sv. Elektricitetsfören:s Handlingar (1930 Nr I.).
Siemens-Schuckert, Zl.-Blatt Nr. 3.1., Febr. 1954.

Torsten Wilner

En bestämning av smältpunkten för tenn. Ett tillägg

Den metod att bestämma smältpunkten för tenn, som jag har beskrivit i Elementa *40*, 31, 1957, har i flera fall visat sig opålitlig därigenom att den lilla tennklump, som förenar koppartrådarna (se figuren i samma uppsats) ej alltid faller av efter smältning och strömmen sålunda ej blir bruten. Det har nu avhjälpts genom att koppartrådarna har ersatts av svagt fjädrande mässingstrådar, som springa isär då tennet smälter.

En ännu lämpligare badvätska än ren fenyleter har jag funnit angiven för ett helt annat ändamål i artikeln »Färger, lacker och fernissor» av Paul Nylén i Handbok i Kemisk Teknologi III, sid. 650. Den kallas Dowtherm A och är en eutektisk blandning av 26,5 % difenyl och 73,5 % fenyleter, smpt 12°, kpt 260°. Fördelen ligger förstås däri att blandningen är flytande vid rumstemperatur, medan ren fenyleter är fast, smpt 28°.

G. Starck

Aktuellt

En förening för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i västra Sverige

Söndagen den 18 maj 1958 sammanträdde på Vasa läroverk i Göteborg ett femtiotal matematik-, fysik- och kemilärare från Göteborgs stad, övriga Västergötland, Bohuslän, Dalsland och Halland. Vid sammanträdet beslöts, att en förening för matematisk-naturvetenskaplig undervisning skulle bildas i västra Sverige, då det visat sig, att lärare från denna landsdel endast sporadiskt besökte de sammanträden, som motsvarande föreningar i Stockholm och Lund anordnade. En interimsstyrelse tillsattes för att utarbeta stadgar och föreningens första ordinarie sammanträde beräknas hållas någon söndag i början av oktober 1958.

Efter förhandlingarna höll professor Harald Bergström, Chalmers tekniska högskola, ett föredrag med titeln »Några synpunkter på matematikundervisningen i våra skolor». Föredraget uppskattades livligt av de närvarande och en kortare diskussion följde. Gumperts hade ordnat en trevlig utställning av fysikmateriel, som demonstrerades av dess experter.

Anmälningar om medlemskap i föreningen mottagas av rektor Arne Pleijel, Högre allmänna läroverket i Trollhättan, tel. 10227, och lektor Per Häggmark, Trerörsgatan 3, Järnbrott, tel. Göteborg 454128.

Arne Pleijel

Kurs i fysik

anordnad av K. Skolöverstyrelsen hölls i Uppsala under tiden 5—15 aug. 1958. Vid öppnandet av kursen erinrade Skolöverstyrelsens representant, lektor Bengt Nilsson, om fysikens enorma utveckling under de senaste decennierna. Denna utveckling måste påverka fysikundervisningen, framför allt i gymnasiet. Kursen var huvudsakligen avsedd att låta fysiklärare med äldre examina komma i kontakt med arbetsmetoder och apparatur inom två centrala områden i den moderna fysiken: elektronik och atomfysik.

Arbetsprogrammet var så upplagt att förmiddagen upptogs av föreläsningar, som direkt förberedde eftermiddagens laborationer. Föreläsare var docenterna O. Beckman och G. Ekspong, vilka även tillsammans med assistent P. Bergvall ledde laborationerna. Dessa omfattade elektronrörens karakteristikor och förstärkning, elektriska filter, glimrör, svängningskretsar, GM-röret, konstgjord radioaktivitet och scintillationsspektrometern. En förmiddag ägnades åt en redogörelse för uppläggningen av kurserna på Fysikum och en demonstration av de olika forskningsgruppernas apparatur. En visning av synkrocyklotronen och ett besök på Jonosfärobservatoriet i Lurbo ingick också i programmet. Vidare redogjorde kursledaren, lektor A. Ljunghall, för vissa moment ur den moderna fysiken, som bör ingå i realgymnasiets fysikkurs och demonstrerade i samband därmed en del undervisningsmateriel på Försvarets läroverk. Här visades Wulfelektroskopet för bestämning av halveringstiden för thoriumemanation och räckvidden för α-partiklar, katodstrålerör för bestämning av e/m, kontinuerlig dimkammare m. m.

Genom de väl planlagda föreläsningarna och demonstrationerna och de skickligt ledda laborationerna blev kursen av synnerligen stort värde för de 23 deltagarna.

Folke Lindskog

Kurs i kemi

anordnad av Lärarhögskolan i Stockholm med sikte på orienteringskursen i näst högsta ringen hölls under tiden 23—28 juni 1958.

Kursledare var lektor Bertil Englund, Uppsala, som dessutom uppträdde som flitig och spirituell föreläsare. I sina föredrag behandlade lektor E.: Orienteringskursen i kemi, mål och metoder, erfarenheter och önskemål, Användning och behov av åskådningsmaterial, Den organiska kemins strukturlära, Arsenikförgiftningar, Syra-bas-frågans utveckling, Experimentell behandling av syra och bas, Den tredje dimensionen i kemin. Dessutom demonstrerade lektor E. ett par typlektioner, som tydligt visade, att kursen borde kunna göras både lättfattlig, intressant och värdefull för eleverna.

Andra föreläsare behandlade: Svensk kemisk industri (tekn.dr C. O. Gabrielsson, Örnsköldsvik), Plastkemi (ingenjör Olle Jonsson, Lidingö), Bindning och struktur (docent Ingvar Lindqvist, Uppsala), Några aktuella biokemiska frågor (fil.lic. Per Åke Albertsson, Uppsala).

Studiebesök gjordes vid Statens Institut för Folkhälsan och vid AB Atomenergis kemiska avdelning.

I kursprogrammet ingick även grupparbete och diskussioner om aktuella spörsmål. Några axplock bland diskussionsämnena: Förstår latinarna experiment, Vågar man använda formler, Ger vår lärarutbildning det underlag som lärarna behöver för orienteringskurserna, Skall anteckningar vara obligatoriska? — Den sista frågan besvarades så, att eleverna bör stimuleras att föra anteckningar. Härigenom får de mer behållning av kursen, finner den roligare, och får dessutom en nyttig övning i att föra föreläsningsanteckningar. — Att lärarutbildningen är otillfredsställande framgick redan därav att så många av diskussionsdeltagarna under föregående år givit en orienteringskurs och därvid funnit fortbildning nödvändig. Att alla var glada och tacksamma för den som nu gavs är säkert.

Ivar Stål

Industriorientering för lärare

Den accelererande utvecklingen vidgar snabbt omfattningen av den industrikännedom en kemi- eller geografilärare bör besitta för att hans undervisning skall kunna betecknas som förstklassig. Industrikännedom får dessvärre de flesta av dessa lärare vid sin akademiska utbildning inte så mycket av, och vidare åldras detta slag av kunskap snabbt. Det är därför glädjande att Industriens upplysningstjänst varje år arrangerar en veckolång rundresa till representativa svenska industrier för ett femtiotal lärare från läroverk, enhetsskola, folkhögskola m. fl. skolformer.

I år förlades kursen till Göteborg med omnejd under tiden 12—19 juni. Resan startade i Trollhättan med ett besök på NOHAB, som tillverkar vattenturbiner, lokomotiv och dieselmotorer; vidare besöktes Fosfatbolagets anläggning för framställning av natriumklorat, perklorater, kalciumkarbid m. m. Trollhätte kraftverk — både Hojumstationen och den gamla Olidestationen — demonstrerades av Vattenfalls representant. I Vargön studerades sulfitfabriken, träsliperiet, pappersbruket samt det elektriska smältverket. Efter en mellankommande söndag, som användes till en kulturhistorisk exkursion längs Göta älvdal, fortsattes studierna med Göteborgs hamn och Götaverkens skeppsbyggen på upp emot 40 000 ton. Vidare besågs glastillverkningen i Surte, öltillverkning (Pripp & Lyckholm), SKF:s kullagerfabrikation samt Gamlestadens bomullsspinneri med väveri,

färgeri och konfektionsfabrik. Resan slutade i Mölndal hos SOAB, som gör linolja, ftalsyreanhydrid, plaster m. m.

Rektor E. Eklund och hans medhjälpare civilekonom B. Eriksson visade än en gång sin stora skicklighet att organisera och leda denna kurs. Industridemonstrationerna — som gjordes i den besökta industriens egen regi — var av vitt skiftande kvalitet. På vissa ställen sköttes demonstrationen med pedagogisk skicklighet av driftsledare med stora kunskaper och stöd av film, trycksaker, stenciler, portabel högtalare etc., och deltagarna delades upp i ett tillräckligt antal grupper för att kunna ha gott utbyte av besöket. Men det inträffade även att demonstratörens huvudsakliga värde låg i att han hittade vägen runt i anläggningen.

Vid bedömningen av värdet av denna industrikurs kommer man in på frågan om i vilken utsträckning den deltagande läraren förmår ge sina elever del av sina intryck. Det står härvid fullt klart, att en industri (SOAB har här givit ett efterföljansvärt exempel), vilken förser hans skola med fabrikationsschema och prover på råvara, mellanprodukter och färdigvara, ger läraren en mycket god hjälp. Kunde Industriens Upplysningstjänst medverka till en sådan utveckling, skulle dess redan nu värdefulla verksamhet bli ännu värdefullare.

Sten Paulson

Bokanmälningar

R. Creighton Buck, *Advanced Calculus*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1956, Pp. 423, $ 8.50.

»In writing this book, we had in mind four main objectives: to review elementary calculus with rigor, but without losing the student's interest by retracing too-familiar ground; to give a systematic and modern approach to the differential and integral calculus of functions and transformations; to develop analytical techniques for attacking some of the typical problems which arise in applications of mathematics; to give an introduction to modern points of view in mathematics, especially valuable for those few who will continue with graduate work in mathematics or physics, without becoming so abstract that the rest gain nothing».

Författaren behandlar i 7 kapitel elementär topologi, funktioner, integraler, konvergenssatser, derivator och geometriska tillämpningar. För enhetlighetens skull har han valt att samtidigt diskutera funktioner av en variabel och av flera variabler. Mycken möda har ägnats åt att göra stoffet lättbegripligt, och det hela har blivit en lärobok av hög kvalitet.

Bo Kjellberg

King-Laï Hiong, *Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algébroïdes.* »Mémorial des sciences mathématiques», No. 139. Gauthier-Villars, Paris 1957, 104 p.

I boken behandlas klassiska problem ur Nevanlinnas värdefördelningslära för meromorfa funktioner med hjälp av rent analytiska metoder.

I första delen undersökes, huvudsakligen i anslutning till den franska skolan (Montel, Miranda, Milloux etc.), de relationer i fråga om tillväxthastigheten och värdefördelningen, som råder mellan en meromorf funktion och dess derivata. Frågeställningen är härvid inte alltid helt naturlig och resultaten därför ofta rätt ofullständiga och formellt komplicerade. Trots detta har författaren lyckats få fram också några konkreta och intressanta nya resultat.

Därefter framställes värdefördelningsegenskaper hos algebroida funktioner. Ehuru mer än 20 år har förflutit sedan en systematisk teori tillkom, närmast tack vare H. Selberg och Valiron, har ingen enhetlig framställning tidigare publicerats. Det är därför väl motiverat att ta denna teori med i boken, fastän författaren ej har många nya resultat att rapportera.

I sista delen studeras lineära kombinationer av analytiska funktioner. Härvid har H. Cartans teori varit den enda förebilden, medan Ahlfors' och H. och J. Weyls näraliggande teori för meromorfa kurvor förbisetts.

Boken kräver rätt goda kunskaper i värdefördelningsläran och har därför mera karaktären av en handbok för experter än en inledning till ämnet för nybörjare. *O. Lehto*

D. C. Murdoch. *Linear Algebra for Undergraduates.* John Wiley & Sons, Inc., New York/Chapman & Hall, London, 1957, Pp. 239, $ 5.50.

Denna bok behandlar vektor- och matrisalgebran fram till och med reduktion av kvadratiska former. Dessutom finns ett kapitel om Hermiteska matriser. Utom ramen för ämnet finnas i ett tillägg på 33 sidor de viktigaste resultaten inom den analytiska geometrin i 3 dimensioner samlade. Vidare finnas ett stort antal instruktiva exempel med svar. De svåraste exemplen äro dessutom försedda med anvisningar. Typografin slutligen gör denna trevliga bok överskådlig och lättläst.

Uppläggningen av ämnet är axiomatisk, varför boken borde passa för matematikstuderande på 3- och 4-betygsstadiet. Boken rekommenderas varmt till alla vid våra universitet och högskolor, som önska utöka sina algebrakunskaper något utöver 2-betygskursen.

Hans Riesel

KAISER S. KUNZ, *Numerical Analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1957, Pp. 381, $ 8.00.

Under det senaste årtiondet har intresset för numerisk analys stegrats mycket starkt, främst beroende på tillkomsten av matematikmaskinerna. Detta har bl. a. manifesterat sig i utgivandet av en rad läroböcker med större eller mindre förtjänster. Kunz' bok hör avgjort hemma i den förra klassen. Av någon anledning tycks en del författare som t. ex. Hildebrand, lägga huvudvikten vid interpolation, numerisk derivation och integration samt lösning av differentialekvationer, medan matriser, lineära ekvationssystem, egenvärdesbestämning etc. endast ägnas ett förstrött intresse. Andra författare, som t. ex. Householder, följer den rakt motsatta linjen, och rec. har ännu inte stött på någon lärobok, som i detta avseende är helt välbalanserad. Kunz' bok visar sig höra hemma i den första gruppen. I övrigt är emellertid boken mycket innehållsrik och de flesta moderna metoder finns medtagna (Jacobis metod för egenvärdesbestämning saknas dock). Även mindre användbara metoder anförs ibland för att ge läsaren en bättre bakgrund. Varje kapitel avslutas med en rikhaltig samling exempel.

I förordet säger författaren, att då hans mål väsentligen är rent praktiskt, så har den matematiska strängheten fått stå tillbaka. Symboliska metoder har t. ex. använts fritt utan att några inskränkningar anges. I regel har detta inga större praktiska nackdelar, men det vore likväl värdefullt med några antydningar om för vilka funktionsklasser som formlerna kan tillämpas.

Som slutomdöme gäller trots anförda kritiska synpunkter, att detta är en bok som man varmt vill rekommendera. *Carl-Erik Fröberg*

NYHLÉN/AMUNDSSON/BROMAN, *Rymdgeometri för gymnasiet.* Svenska Bokförlaget/Norstedt, Stockholm, 1957, 63 s., kr. 4:75.

Läroboken är avsedd för realgymnasiets matematiska gren och skiljer sig inte mera avsevärt från andra läroböcker för samma stadium. Den inledande delen om punkter, räta linjer och plan är dock mera systematiskt och fullständigt behandlad än i andra läroböcker för gymnasiet. De bevis som ges, och de är rätt många, utmärkes av klarhet och pregnans i framställningen. Samma klarhet utmärker för övrigt den återstående delen av boken, som omfattar volym- och ytberäkning.

Exempelsamlingen är stor — närmare 200 exempel — och såvitt jag kunnat bedöma är den god. De flesta problemen på de olika avdelningarna är rätt enkla. I det sista avsnittet, »Blandade övningsexempel», är emellertid flertalet uppgifter tämligen krävande.

Karl von Proschwitz

HANNES HYRENIUS, *Statistiska metoder*. Första och andra bandet. Andra upplagan, omarbetad och utvidgad. Gumperts förlag, Göteborg, 1957, 625 sid., kr. 42: — (för studerande och lärare kr. 28: — jämte porto vid rekvisition från Statistiska institutionen, Arkivg. 1, Göteborg C).

Att skriva en lärobok i statistik är en svår uppgift, svårare idag än någonsin förr. Materialet är överväldigande rikt. Traditionella metoder börjar sakta men säkert ersättas av nya. Läsarna har vitt skilda utgångslägen och intresseområden. Det sista orsakar kanske mest huvudbry. Är det t. ex. möjligt att skriva en bok som passar både den som uteslutande är intresserad av statistiken som praktiskt instrument och den som vill tränga bakom formlerna?

Författaren till föreliggande arbete vill gärna besvara den frågan jakande. Boken »utgör ett försök att presentera grunderna av den statistiska metodiken med relativt enkla matematiska hjälpmedel men att samtidigt för den, som har nödvändiga kunskaper, i koncentrerad form redovisa de viktigaste partierna av den matematisk-statistiska teori, som bildar kärnan i de analytiska instrumenten.»

Arbetet består av tre delar och ytterligare en planeras. Del 1, Statistisk deskription (224 sid.), är skriven för alla och användbar av alla. Den innehåller sedvanligt stoff, histogramritning, momentberäkningar, korrelations- och regressionsräkning, indextal, litet om tidsserier. Ett och annat för med sig en fläkt från gamla tider och inte minst från tiotalets och tjugutalets Lund: associationskoefficienten, beräkningen av högre moment, Charliers snedhetsmått, Charliers kontroll på beräkning av potenssummor, Sheppardkorrektionen, m. m. Åtskilligt av detta kunde ha rensats bort, utan att någon kunnat anklaga författaren för pietetslöshet.

Del 2, Statistisk teori (123 sid.), innehåller något om »sannolikhetslärans grunder», litet mer om medelfelsberäkningar och de vanliga fördelningarna (inklusive t, z och F) samt en högst modern, kortfattad framställning av hypotesprövnings- och skattningsproblemen. Svårigheten med författarens dubbla syfte med boken framträder här. Praktikern lär inte förstå så mycket, och teoretikern är missnöjd med luckorna i framställningen. Problemet är svårlöst; möjligen hade det varit bättre att avstå från alla härledningar och konsekvent använda kokbokstekniken.

Del 3, Statistisk analys (278 sid.), är intressantast. Författaren har nedlagt mycken möda för att systematisera och exemplifiera. Förutom χ^2-analys och de enklaste testningsproblemen i samband med medelvärden och varianser diskuteras variansanalys och några parameterfria metoder. Exemplen är hämtade från många områden och ger en utmärkt bild av statistikens användbarhet. Å andra sidan är de mesta-

dels starkt schematiserade, och den utomordentligt viktiga frågan om formlernas tillämpbarhet i de givna praktiska situationerna behandlas alltför knapphändigt. Läsaren bringas därför aldrig till insikt om vilka faror och bedrövelser som i världen väntar den oskuldsfulle tillämparen av signifikanstest och regressionsanalyser. I flera exempel är det tveksamt om förutsättningarna är uppfyllda eller, alternativt, om problemet är realistiskt formulerat (Ex. 14.2.2, 14.2.11, 16.2.6, Övn. 14.2, 14.5, 14.6, 14.9, 16.7, 18.2). Ett par exempel är tyvärr direkt felaktiga (speciellt Övn. 14.3). Som helhet är Del 3 emellertid värdefull, inte minst som utgångspunkt för diskussioner under en erfaren statistikers ledning.

Anmälaren har noterat ett antal isolerade fel eller vilseledande formuleringar i olika textavsnitt av de tre delarna, vilka av utrymmesskäl här ej kan beröras.

Helhetsomdömet blir följande. Det omfångsrika verket ger en nyttig översikt över ett stort antal praktiskt viktiga metoder, illustrerade av exempel varav huvudparten är väl valda för sitt syfte. De statistikstuderande vid högskolor och universitet kan ha glädje av delar av boken, särskilt som den är den enda i sitt slag på svenska; däremot är den icke väl lämpad för självstudier.

Boken har framställts med Multilith-förfarande (eller liknande) av utmärkt kvalitet. *Gunnar Blom*

Lancelot Hogben, *Statistical Theory.* The Relationship of Probability, Credibility and Error. George Allen & Unwin Ltd, London, 1957, Pp. 510, 45 s. net.

»Matematik för miljoner» gjorde Hogben känd bland tusenden. Något sådant kan man inte vänta av denna bok. Bland annat därför att den är svårläst med meningar långa som pytonormar. Ordsvallet sköljer över läsaren som blir andfådd, utmattad. Att läsa boken från pärm till pärm och begrunda allt är mycket begärt även av den extremt läshungrige.

Hogben är milt talat kritisk mot modern statistik och raserar större delen av den statistiska lärobyggnaden. Bland spillrorna återfinns oskadda endast hasardspelteori, statistikens genetiska tillämpningar, statistisk mekanik och felteori i fysikens mening. Av regressionsteori och signifikanstest återstår endast fragment. Hör bara: »We may have to reinstate statistics as continental demographers use the term. Laboratory experiments will have to stand on their own feet without protection from a façade of irrelevant computations. Sociologists will have to use their brains. In my view, science will not suffer.»

Tre ting gör boken intressant. Först och främst har Hogben trots de våldsamma överdrifterna rätt i mycket. Utrymmet tillåter inte

en motivering av detta omdöme. Vidare är de historiska utblickarna mycket upplysande, och författaren öser frikostigt ur källorna med intressanta citat. Slutligen har dispositionen med dess uppdelning av statistiken i huvudområden självständigt värde.

Tre ting krävs av läsaren för att han skall stå ut med boken: tålamod, debattlust och ett levande intresse för statistikens grundvalar.

Gunnar Blom

Kathleen H. V. Booth, *Programming for an Automatic Digital Calculator*. Butterworths Scientific Publications, London, 1958, Pp. 238, 42 s.

Boken beskriver matematikmaskinen APEXC, som finns vid Birkbeck College i London, och några av de koder, som ha utarbetats för denna maskin. I förordet framhålls det, att APEXC, som är en tvåadressmaskin, har en så väl vald operationslista, att det är synnerligen lätt att ur koderna förstå och lära sig de allmänna principerna för programmering för matematikmaskiner. Anmälaren delar inte denna uppfattning. Större delen av bokens utrymme upptages av koder, vilket gör framställningen så detaljerad, att läsaren snart förlorar sig i alla detaljerna.

I bokens sista kapitel, som heter »Automatic Programming», kommer författarinnnan in på de framsteg i detta ämne, som under de senaste åren gjorts på olika håll i världen. Apropå s. k. compiler-system låter författarinnan bokens slutord bli: »Sådana system förefalla inte särskilt användbara för universitetslaboratorier, som huvudsakligen syssla med forskning och undervisning.» Detta är endast en av de besynnerligheter man möter i boken, som anmälaren inte kan rekommendera.

Hans Riesel

J. L. Synge, *The Hypercircle in Mathematical Physics*. A Method for the Approximate Solution of Boundary Value Problems. Cambridge University Press 1957. Pp. XII+424, 70 s. net.

Bokens första 75 à 100 sidor kan med behållning läsas som en ovanligt åskådlig introduktion till Hilbertrymdens geometri. Förf. — välkänd bl. a. från böcker i geometrisk optik, mekanik och relativitetsteori — lägger sig framför allt vinn om att läsaren verkligen skall känna sig hemmastadd också i en oändligt-dimensionell funktionsrymd, och han uppmuntrar den geometriska intuitionen genom flitigt bruk av figurer. Denna åskådliga inriktning är utmärkande också för fortsättningen, som ägnas åt bokens huvudproblem: att utveckla en metod för approximativ lösning av vissa randvärdesproblem i matematisk fysik. Metoden i fråga ('hypercirkelmetoden') infördes av förf. tillsammans med W. Prager 1946 och har sedan ägnats ett flertal av-

handlingar. Den utnyttjar vissa allmänna geometriska egenskaper hos den sökta lösningen för ett approximationsförfarande, där man i varje steg har fullständig kontroll över felgränserna. Den lämpliga approximationstekniken kan variera från fall till fall. I föreliggande arbete finner man nu en värdefull översikt över metoden, över viktiga randvärdesproblem och över tillämpningar; speciellt behandlas därvid användning av pyramidfunktioner. Flera avancerade problem, särskilt inom elasticitetsläran, är uppställda och utförligt genomräknade. Metodens användning vid indefinit metrik i funktionsrymden (svängningsproblem) beröres även. — Som förf. påpekar, är framställningen genomgående sådan att den främst vänder sig till läsare som är hjälpta av geometriska föreställningar; övriga hänvisas till tidskriftslitteraturen. Många övningsexempel. *S. Bertil Nilsson*

C. E. Easthope, *Three Dimensional Dynamics.* A Vectorial Treatment. Butterworths Scientific Publications, London 1958. Pp. 277, 42 s.

En genomgående vektoriell behandling av partiklars och stela kroppars dynamik. I överensstämmelse med detta program är inga tensorer medtagna och inte heller Lagranges ekvationer eller dylikt. Kapitlen behandlar i ordning vektoralgebra, partikelns rörelse, stela kroppens kinematik, roterande axelsystem, tröghetsmoment, rörelseekvationer för partikelsystem och stela kroppar, Eulers ekvationer, precessionsrörelse, stötproblem för kroppar. Ett kortfattat appendix är ägnat åt statik.

Framställningen faller närmast under rubriken tillämpad matematik, och några rent fysikaliska frågor är knappast berörda. Detta tillsammans med stoffurvalet gör att anmälaren ej vill anbefalla boken som direkt grundläggande kursbok i mekanik, trots att den betecknas som en introduktion till det vektoriella studiet av ämnet. Däremot kan det angivna stadiet, andra eller tredje universitetsåret, passa bra också för svenska förhållanden; som fortsättningskurs för den som vill tränga bättre in i speciella mekaniska problem kan boken avgjort rekommenderas. Den innehåller bl. a. en utförlig behandling av en partikels rörelse på en glatt rotationsyta och likaså av en stel kropps rörelse, inbegripet snurran och biljardbollen (dock utan diskussion av begynnelsevillkor). Över huvud taget är flera belysande och inte särskilt enkla exempel genomräknade, och den studerande får många problem att själv öva sig på (formulerade så att svaren brukar framgå). Härledningar och bevis är som regel mycket omsorgsfullt genomförda; och om några detaljer på sina ställen glidits förbi väl lätt, har detta ingen större betydelse för icke-nybörjaren. Kort sagt: en nyttig bok för den intresserade. *S. Bertil Nilsson*

T. G. Cowling, *Magnetohydrodynamics.* Interscience Tracts on Physics and Astronomy. Interscience Publishers Inc., New York, 1957/1958, Pp. viii+115, $ 2.00.

Boken handlar om ett fantasieggande område, nämligen växelverkan mellan vätskors eller gasers strömningar och magnetfält eller elektriska strömmar. De lockande tillämpningarna röra solfläckarnas natur och deras uppkomst, solens, jordens och interstellära magnetfält osv. Nu börjar man också försöka finna tekniska användningar, men boken nöjer sig med de kosmiska tillämpningarna.

Boken är en inledning i magnetohydrodynamik för sådana läsare, som ha någon kännedom om de grundläggande differentialekvationerna för elektromagnetism och hydrodynamik.

Beträffande de kosmiska tillämpningarna har fältet varit ganska fritt för fantasirika hugskott, ty experimentell prövning kan blott förekomma i mindre utsträckning. Grundekvationerna och vissa av deras lösningar ha visserligen prövats genom noggranna och riskfyllda experiment med kvicksilver och flytande natrium, och det har skett på Tekniska Högskolans institution för elektronik i Stockholm. Man har likväl ej kunnat efterbilda de astrofysiska förhållandena. Det är därför intressant att få del av de personliga åsikter och omdömen om de olika hypoteserna som Cowling, en kännare på området, framlägger i denna lilla lättlästa volym.

De svenska insatserna äro betydande. Utan att detta får uppfattas som någon slutgiltig rangordning, kan det ha ett kuriositetsintresse att veta, att flitigast citerad är av svenskarna Walén, därnäst Lundquist, Alfvén och Lehnert. *Hilding Faxén*

Dislocations and Mechanical Properties of Crystals. International Conference at Lake Placid, September 6—8, 1956. Editors: J. C. Fisher, W. G. Johnston, R. Thomson, T. Vreeland. J. Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1957, Pp. 634, $ 15.00.

Metallernas hållfasthet är av en fundamental betydelse inom vår moderna civilisation. Likväl äger man ännu ej någon exakt fysikalisk bild av vad som sker i strukturen, då en metall deformeras eller undergår brott. Olika gitterstörningar, särskilt dislokationer, ha visat sig spela en vital roll i dessa sammanhang. Under de två senaste decennierna ha ett flertal internationella konferenser och symposier hållits över dislokationerna och de mekaniska egenskaperna. Lake Placid-konferensen hösten 1956 kan kanske anses som liten vad som gäller deltagarantalet, ett femtiotal av de ledande auktoriteterna på dislokationsområdet, men med avseende på de framlagda rönen är den utan tvivel en av de viktigaste.

Som konferensens titel anger, handlar större delen av bidragen om de mekaniska aspekterna hos dislokationerna. Artiklarna i den första fjärdedelen av boken äro emellertid av något avvikande karaktär i det de beröra en del intressanta försök, som nyligen gjorts att visuellt studera dislokationerna i gittret. Den använda principen är, att man i vissa material såsom NaCl och AgBr genom lämplig värmebehandling försöker ansamla kolloidala partiklar längs dislokationslinjerna, varigenom dessa framträda vid genomlysning av kristallen. Genom mikroskopiska undersökningar av dislokationernas geometri i gittret enligt denna metod ha tidigare teoretiska resultat i många fall kunnat verifieras.

Dislokationernas inverkan på de mekaniska egenskaperna behandlas i artiklar om mekanismen för plastisk deformation i olika kristaller, återhämtningsprocessen efter deformationen, växelverkan mellan föroreningar och dislokationer, sträckgränseffekten, utmattningsfenomenet m. m. Dessa bidrag äro huvudsakligen av experimentell natur, men även rent teoretiska artiklar finnas, bl. a. en intressant behandling av glidmekanismer och deformationshärdning i kubiskt ytcentrerade och hexagonalt tätpackade metaller av Seeger.

Ett relativt nytt användningsområde för metallerna är vid konstruktionen av reaktorer. Förutom rent mekaniska påkänningar har man här även att ta hänsyn till de gitterdefekter, som framkallas på grund av den intensiva neutronbestrålning, som materialet utsätts för. Dessa bestrålningsskador och deras inverkan på de mekaniska egenskaperna behandlas i bokens sista avdelning.

Framställningen är genomgående av tekniskt hög kvalitet. Efter varje artikel finnes en sammanfattning av den följande diskussionen.

Genom ett begränsat antal deltagare i förening med ett noggrant urval har man velat skapa en konferens med maximal information. Bidragen i denna bok bära på ett utmärkt sätt vittnesbörd om detta. För materialforskaren är boken en värdefull informationskälla om det aktuella läget på dislokationsområdet. *Hans U. Åström*

Douglas R. Hartree, *The Calculation of Atomic Structures.* Wiley's Structure of Matter Series. J. Wiley & Sons, New York / Chapman & Hall, London, 1957, Pp. xiv+182, $ 5.00.

Under den hektiska period av tillämpning inom olika områden av mikrofysiken, som följde kvantmekanikens tillkomst i mitten av 1920-talet, bidrog denna boks författare till utvecklingen av den betydelsefulla metod för beräkning av atomers elektronstruktur, som sedan har fått namnet Hartree-Fock-modellen. Denna karakteriseras av antagandet, att elektronerna rör sig oberoende av varandra i slutna banor, och den har bildat utgångspunkten för alla framgångsrika beräk-

ningar av elektronvågfunktioner för atomer med mer än två elektroner. Efter de första årens livliga verksamhet följde en period med lugnare utveckling. På senare år har arbetet åter intensifierats, beroende dels på ett ökat intresse för information om atomers elektronstruktur, dels på att de snabba elektroniska matematikmaskinerna medger beräkningar i en omfattning, som tidigare inte varit möjlig. Behovet av en sammanställning av metoder och resultat har motiverat bokens utgivande, och det är tacknämligt, att en person med professor Hartrees stora erfarenhet velat ta på sig detta arbete.

Boken har det tvåfaldiga syftet att dels tjänstgöra som en referenskälla för personer, som är verksamma med beräkningar på detta område, och dels ge en inblick i den teoretiska bakgrunden och de numeriska metoderna vid utförandet av beräkningar för dem som har användning av resultaten, t. ex. kvantkemister. Författaren har gått till verket med föresatsen att använda enklast möjliga matematiska formalism vid härledningarna, och man kan ifrågasätta, om han inte gått väl långt i denna sin strävan på bekostnad av klarheten och elegansen.

I bokens inledningskapitel ges en kortfattad resumé av de delar av den elementära kvantmekaniken, som kommer i fråga för den fortsatta framställningen, och vidare återfinner man där en del allmänna synpunkter. I detta sammanhang hade man gärna sett, att tillämpningarna av de vunna resultaten hade givits en något utförligare belysning. De två följande kapitlen ägnas härledningen av ekvationerna för de radiella vågfunktionerna med hjälp av variationsprincipen. I bokens centrala del behandlas sedan de numeriska metoderna för lösning av ekvationerna, och tyngdpunkten har lagts på beräkningar utan ytterligare approximationer. Några exempel bidrar till att lätta upp framställningen. Vissa delar måste ge ett något plottrigt intryck på den läsare, som inte sysslat med hithörande problem. De två sista kapitlen ger en översikt över den relativistiska generaliseringen av teorien samt olika möjligheter att förbättra enpartikelapproximationen. Boken avslutas med tabeller över beräknade vågfunktioner och en referenslista, som upptar alla relevanta arbeten efter 1948.

Typografien och det allmänna utförandet är tillfredsställande, men boken ger inte intryck av att ha korrekturlästs med någon större omsorg. Recensenten har funnit ett trettiotal tryckfel av varierande karaktär, vilket måste sägas vara i kraftigaste laget. Hur som helst, boken är hittills ensam på sitt område, och den fyller utan tvivel väl det behov av en aktuell monografi, som också många andra grenar av den moderna fysiken känner.

Jan Blomqvist

R. Daudel, *Les fondements de la chimie théorique.* Gauthier-Villars, Paris, 1956, 236 p., 3 500 fr.

Det finns ju numera en hel del introduktioner i kvantmekanik, medan däremot kvantkemien, dvs. kvantmekanikens tillämpningar på kemiska problem, inte är särskilt välförsedd. Flera av nu förefintliga läroböcker berör endast flyktigt de kemiska tillämpningarna, eller också behandlar de den matematiska bakgrunden mindre noggrant. Ovanstående arbete är skrivet med tanke på tillämpningarna, men trots detta lägger författaren stor vikt vid metodernas teoretiska underlag.

Sidantalet är ungefär jämnt fördelat mellan atomer och molekyler. Väteatomen genomräknas relativt grundligt, varefter författaren med helium som naturligt mellanled övergår till de allmänna metoderna för beräkning av atomvågfunktioner. Skalbegreppets approximativa karaktär för system med flera elektroner utredes noggrant, och i samband därmed diskuteras det av Daudel själv införda logebegreppet. För varje mångpartikelsystem kan man nämligen dela in rummet i »loger», så att sannolikheten att finna en enda elektron med ett visst spin i varje loge blir så stor som möjligt. Denna indelning beräknas ur systemets vågfunktion och ger enligt Daudel en naturlig geometrisk beskrivning av systemet. — I molekylavsnittet ägnas största delen åt elektronvågfunktionerna, medan beräkningar av molekylernas vibrations- och rotationsfunktioner huvudsakligen belyses med exempel på tvåatomiga molekyler. Ett kort kapitel handlar om beräkning av molekylära egenskaper, såsom jonisationspotential, elektronaffinitet, interatomära avstånd dipolmoment m. m. Det sista kapitlet, som innehåller en allmän diskussion om den kemiska bindningen, bildar övergång till författarens kommande arbete »Structure des molécules», som skall behandla molekylerna i detalj.

Bland bokens förtjänster bör framför allt nämnas den stränga boskillnad, som författaren gör mellan matematiska metoder och fysikaliska och kemiska tolkningar. Mycket missförstånd har ju åstadkommits genom att man i rent matematiska metoder inlagt fysikaliskt »innehåll». Orsaken till detta har ofta varit olämpligt valda termer. Daudel ger ett flertal exempel på sådana termer, och han varnar gång på gång i beskrivningen av speciella metoder för att ge dem en omotiverad fysikalisk betydelse.

Både för atomer och molekyler beskriver Daudel den metod för att beräkna vågfunktioner, som kallas superposition av konfigurationer. Den innebär att man utvecklar vågfunktionen i en serie av determinanter uppbyggda av en-elektronfunktioner. För att detta skall vara möjligt, måste determinanterna bilda ett fullständigt system, och detta

i sin tur förutsätter att en-elektronfunktionerna bildar ett fullständigt system. De väteliknande funktionerna utgör ett fullständigt system endast om man inkluderar de funktioner, som har positiva energier och sålunda tillhör den kontinuerliga delen av spektrat. Detta framhåller visserligen Daudel, men trots detta skriver han några rader längre ned, i den spärrade sammanfattningen av metoden, att man i allmänhet inte tar hänsyn till funktioner med positiva energier. Det är visserligen sant att många hittills gått till väga på detta sätt, men inte desto mindre är metoden klart olämplig. Den vilar nämligen på den missuppfattningen, att funktioner med positiva energier skulle ge små bidrag till serieutvecklingen av vågfunktionen, och detta har visats vara felaktigt.

För att få in allt sitt material på något mer än 200 sidor, har författaren givetvis nödgats komprimera innehållet rätt kraftigt. Genom de många exemplen undgår han dock att bli alltför abstrakt. Boken bör därför kunna läsas med behållning av var och en, som är någorlunda insatt i kvantmekanikens grundprinciper. Framför allt kan den rekommenderas åt den, som är intresserad av en kortfattad översikt av kvantmekanikens tillämpningar på kemiska problem.

J.-L. Calais/P. O. Löwdin

Léon Guillet, *Précis de métallographie*. Masson & Cie, Paris, 1958, 254 p., 1800 fr.

Verket är en kortfattad lärobok, avsedd som underlag för en relativt omfattande allmän föreläsningskurs i ämnet vid tekniska högskolan i Paris, »École centrale des arts et manufactures», där författaren är professor. Hos läsaren förutsättes enligt läroplanen förtrogenhet med allmän fysik, termodynamik och elementen av kristallfysiken, speciellt beträffande atomanordningar och tillhörande bestämningsmetoder. Drygt hälften ägnas grundläggande metallära. Här rekapituleras inledningsvis det för metallerna utmärkande: atomstruktur, mikrostruktur, strukturella och magnetiska omvandlingar, beteende vid plastisk deformation, utan och med rekristallisation. Huvudvikten lägges emellertid på legeringsläran. Det är överraskande hur mycket man här kunnat få med i diskussionerna av fasjämvikter i olika legeringar, med hjälp av fasdiagram. Det gäller såväl fall där flytande faser förekomma, som situationer där alla jämviktsreaktioner hänföra sig till fast tillstånd. Trekomponentsystem äro här ganska väl representerade, delvis med perspektivskisser över jämviktsytornas lägen i temperatur/sammansättning-rummet. Lagarna för hantering av diagrammen ha måst förutsättas, utan bevis. Avsnittet avslutas med ett kapitel om tillstånd som inte representera jämvikt och tillhörande reaktioner: utskiljningsföreteelserna, släckning, anlöpning, korntillväxt.

Bokens andra huvudavsnitt ägnas ett antal tekniska legeringar. Det behandlar stål, gjutjärn, olika typer av kopparlegeringar, lättmetaller. Härtill har anslutits ett kort kapitel som fått rubriken elektrokemisk korrosion. Som tredje och sista avsnitt presenteras på ett 40-tal sidor 20 övningsexempel, de 10 första med fullständiga lösningar, resten med hemligheten bevarad.

Arbetet har ett anspråkslösare syfte än Masings »Lehrbuch der allgemeinen Metallkunde», och det diskuterar inte grunderna med utförligheten hos Wulff-Taylor-Shalers »Metallurgy for engineers» — men det har något av den vaket renodlade inställning till de tekniska tillämpningarna som tjusar hos den sistnämnda boken. Helhetsintrycket är innehållsrikedom, med tonvikt på väsentligheter, och teknisk aktualitet. Som exempel till den föregående framställningen i boken synas de avslutande övningsuppgifterna vara i svåraste laget. — Av ett arbete av detta slag begär man inga fullständiga litteraturhänvisningar. Men skall referens ges till något som betonas som en upptäckt, då bör upptäckarens namn vara med. Detta kan ibland vara svårt att ange rättvist, sådan som utvecklingen varit på metallområdet. Franska forskare ha här gjort — och göra också nu — förnämliga insatser, internationellt sett, utan att vara de enda. Med hänsyn härtill kunde författaren varit mera restriktiv med franska namn i noterna. Ymnigheten nu tenderar ibland att bli något genant för de apostroferade, och den gör föga rättvisa åt den klart internationella fördelning som bidragen till detta forskningsfält borde visa. *Erik Rudberg*

Henry E. Duckworth, *Mass Spectroscopy.* Cambridge University Press, 1958, Pp. 206, 35 s. net.

Masspektrometri ingriper på de mest skiftande områden inom vetenskap och teknik. Det existerar också ett flertal utmärkta arbeten behandlande speciella delar av masspektrometrin. Däremot förekommer sammanfattande monografier sparsammare. Nytillskott är därför inte ovälkomna. Den föreliggande boken, som ingår i serien Cambridge Monographs on Physics, syftar närmast till att ge en aktuell allmänorientering om masspektroskopins principer och användningsområden. Genom hela boken väljer författaren att i huvudsak endast diskutera mättekniska problem, medan detaljer som har att göra med konstruktion av apparatur, t. ex. jonkälleteknik, i stor utsträckning uteslutes. Detta gör att framställningen blir ganska fyllig ur fysikalisk synpunkt trots det begränsade utrymme som står till buds.

Den första hälften av boken behandlar närmast de ursprungliga frågeställningarna inom masspektroskopin, nämligen precisionsmätningar av atommassor och intensitetsbestämningar av de stabila isotoperna. Dessutom ges en beskrivning av förekommande typer av instrument

liksom en summering av de jonoptiska lagarna som ligger till grund för spektrometrarnas funktion. I detta senare kapitel noterar man, att ett relativt stort utrymme ägnas åt diskussion av randfält, vilket inte är så ofta förekommande i detta sammanhang. Den senare hälften av boken sammanfattar sedan den mångfald av problem inom kärnfysik, atomfysik, fysikalisk kemi, biologi, geologi osv. som kan lösas med masspektroskopiska metoder. Denna redogörelse blir ofta ganska summarisk, men utförliga referenser lämnas. Man efterlyser emellertid en mera ingående behandling av de allmänna principerna för analys. Som helhet är det dock en välskriven bok, som ger en klar uppfattning om masspektroskopins metodik och stora användbarhet.

T. Alväger

J. E. Hooper/M. Scharff, *The Cosmic Radiation.* Methuen's Monographs on Physical Subjects. London 1958, Pp. 172, 12 s. 6 d. net.

Det är nu mer än ett halvt århundrade sedan man först började ana förekomsten av den kosmiska strålningen. Dess natur förblev länge en gåta för vetenskapen. Under de sista 20 åren och framför allt under den allra senaste tiden har man gjort ett stort antal sensationella upptäckter rörande de mycket komplicerade sekundära effekter i atmosfären, som helt och hållet maskerade den primära strålningens rätta natur för de tidigare forskarna på området. Dessa sekundäreffekter ha inte bara gett oss viktiga upplysningar till hjälp vid studiet av primärstrålningen, utan ha också avslöjat existensen av okända former av materia och energi. Forskningsfältet har härigenom kommit att delas upp i ett område, som sysslar huvudsakligen med studiet av primärstrålningens natur och ursprung, och ett annat som behandlar de nya elementarpartiklarna och problemets rent kärnfysiska aspekter.

Ämnet är så stort att varken lekmannen eller fackmannen längre utan svårighet kan hålla sig orienterad över området. Det är därför mycket glädjande att Hooper och Scharffs nyutkomna lilla bok »The Cosmic Radiation» visar sig vara en utmärkt vägledning för den, som intresserar sig för detta fascinerande forskningsfält. Den är skriven av två unga fysiker, som själva framgångsrikt delta i studiet av den kosmiska strålningen, och ger en väl balanserad framställning med undvikande av onödiga detaljer, och med en sund försiktighet, när det gäller att ta ställning i ännu omstridda frågor. Området gömmer ännu på hemligheter, som när de en gång uppdagas komma att ge oss en djupare inblick i atomkärnornas och elementarpartiklarnas natur. För den som nu vill börja följa denna utveckling är Hooper och Scharffs bok en förträfflig utgångspunkt. *Sten von Friesen*

G. W. Series, *The Spectrum of Atomic Hydrogen.* Clarendon Press: Oxford University Press, 1957, Pp. 88, 8 s. 6 d.

Väteatomen är den enklaste atomen, och dess spektrum är därför betydelsefullt för teoretikern, då denne vill testa nya teorier. Speciellt kvantmekaniken har varit starkt beroende av mätningar som gjorts av vätets spektrum. I bokens första hälft skildar författaren hur atomteorin har utvecklats av Bohr, Sommerfeld-Wilson, Schrödinger, Heisenberg-Jordan, Dirac. Det material som presenteras finns i de flesta läroböcker i atomfysik och kvantmekanik, men genom att författaren rätt utförligt skildrar de experimentella resultaten och deras inflytande på teorin har skildringen blivit verkligt läsvärd. Dirac's teori tycktes ge full överensstämmelse mellan experiment och teori, men en del mycket små diskrepanser, vilkas realitet diskuterades, visade sig genom Lambs och Retherfords mätningar 1945 vara verkliga, och teoretikerna blev tvingade att förbättra teorin. I den senare hälften av boken diskuteras de experimentella mätningarna och den teoretiska förklaringen av dessa diskrepanser, s. k. Lambshift. Man finner här kapitel om kvantelektrodynamik och hyperfinstruktur. Det sista kapitlet behandlar positronium, dvs. ett system av en positron och en elektron.

Författaren har på ett berömvärt sätt lyckats beskriva det väsentliga i experimenten, och boken bör vara av värde för både teoretiker och experimentalfysiker. Den ofta förekommande jämförelsen mellan teori och experiment har gjort att boken blivit en skildring av hur modern naturvetenskap arbetar och utvecklas. Läsaren bör ha förkunskaper motsvarande två betyg i fysik, och för den senare hälften av boken fordras nog något större förtrogenhet med kvantmekanik. För den som vill läsa originalarbetena ges 146 referenser täckande tiden från 1896 (Rydberg) till 1956. *Anders Fröman*

A. F. Gibson/P. Aigrain/R. E. Burgess (Ed.), *Progress in Semiconductors.* Heywood & Co. Ltd, London. Vol. I, 1956, Pp. 220, 50 s. net. Vol. II, Pp. 280, 63 s. net.

Studiet av halvledarmaterialen och deras tillämpningar har under det senaste årtiondet fått en enormt vidgad omfattning och betydelse. Såväl de rena forskningsresultaten som de praktiska komponenter de frambragt kräver starkt ökad uppmärksamhet från alla andra områden av forskning och teknik. Men antalet publikationer på detta område uppgår nu till nära 1500 per år, ett antal som gör det omöjligt t. o. m. för de på halvledarområdet aktivt arbetande att hinna följa hela litteraturfloden noggrant. Behovet av aktuella monografier är därför mycket starkt.

Den serie av översiktsartiklar skrivna av ledande forskare och tekniker, som ingår i den nystartade föreliggande revyn, avser att fylla detta behov. Följande ämnen har behandlats i de två första banden.

Del I: Recent Advances in Silicon/N. B. Hannay, The Germanium Filament in Semiconductor Research/C. A. Hogarth, Theory of the Seebeck Effect in Semiconductors/V. A. Johnson, The Electrical Properties of Phosphors/G. F. J. Garlick, The Design of Transistors to Operate at High Frequencies/J. Evans, Photo-Magneto-Electric Effect in Semiconductors/O. Garreta and J. Grosvalet, Field Effect in Semiconductors/ L. R. Godefroy.

Del II: Semiconductor Alloys/F. Herman, M. Glicksman and R. H. Parmenter, Properties of the III—V Compound Semiconductors/ F. A. Cunnell and E. W. Saker, Radiation Effects in Semiconductors/J. H. Crawford and J. W. Cleland, Lifetimes of Free Electrons and Holes in Solids/A. Rose, The Production of High-Quality Germanium Single Crystals/L. G. Cressell and J. A. Powell, Impurities in Germanium/ W. Crawford Dunlap, Jnr., High Electric Field Effects in Semiconductors/J. B. Gunn, Theories of Electroluminescence/D. Curie.

Uppsatserna är i allmänhet utmärkt klart och överskådligt skrivna. Typografi och illustrationer är av utmärkt kvalitet. Serien fyller därför väl det avsedda ändamålet, att ge överblick och orientering över viktiga avsnitt av halvledarområdet, och bör vara till god hjälp både för den, som vill skaffa sig en allmän orientering och för specialisten, som vill ha en aktuell resumé av utvecklingen. *Dick Lundqvist*

J. E. Goldman (Editor), *The Science of Engineering Materials*. John Wiley, New York, Chapman & Hall, London, 1957, Pp. 528, $ 12.00.

De flesta av de i föreliggande bok givna uppsatserna är baserade på redogörelser, lämnade vid Carnegiekonferensen i Pittsburgh 1954, där frågor inom »Fasta tillståndets fysik» behandlades.

I bokens inledande uppsatser ges en orientering i modern fysik, varjämte redogöres för terminologi och definitioner. Följande förteckning över ämnesinnehållet i boken ger en viss uppfattning om vad som i våra dagar avses med fasta tillståndets fysik: Transportfenomen, ferroelektricitet, energibandproblem och fenomen bundna till strukturella oregelbundenheter hos fasta ämnen (strömledning hos halvledare, härdning, kristallhållfasthet etc.), de magnetiska materialens egenskaper, ytfenomen (där bl. a. metallers oxidation och den termodynamiska teorien för ytfaser behandlas). Ett särskilt kapitel är ägnat åt egenskaperna hos icke-kristallina kroppar (cement resp. cement- vattensystemet, högpolymerer och glas). — Boken kan varmt rekommenderas. *J. O. Linde*

William Rostoker, *The Metallurgy of Vanadium.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958, Pp. 185, $ 8.50.

Under 1950-talet har monografier skrivits över flertalet av sådana metaller, som oftare används som legeringselement än som basmetaller men för vilka en viktig framtida teknisk användning i mer eller mindre ren form verkar sannolik. Till dessa hör bl. a. titan, zirkonium, krom, mangan och molybden, och den nu utkomna monografin om vanadin utgör en värdefull komplettering av denna serie. Utom metallurgin för denna intressanta metall behandlas dess och dess legeringars fysikaliska och mekaniska egenskaper samt dess metallografi, korrosionsförhållanden och beteenden som tillsats till andra metaller och legeringar.

Rent vanadin har för närvarande ingen industriell användning, men man har nyligen utarbetat metoder för framställning av högren metall, som visat sig formbar. Bland andra har atomteknikerna börjat intressera sig för vanadin. Tekniken att med vanadin som bas framställa legeringar är mycket ny, och dessa är inte fullständigt undersökta med avseende på sin användbarhet, så att man kan endast säga att de mekaniska egenskaperna kan varieras inom vida gränser; detta har dock inte givit anledning till utbyte av äldre billigare material mot det dyra vanadinet.

Boken verkar trevlig och innehållsrik, men man skulle önska ett utförligare sakregister samt ett personregister. Förordet är daterat mars 1957 och litteraturen verkar väl följd till detta datum; ett undantag i detta avseende utgör den icke obetydliga framställning av vanadinsyra, som Otanmäki-bolaget i Finland satte igång i mitten av 1950-talet genom att sintra och laka vanadinhaltig magnetit.

För alla som är intresserade av utvecklingen av nya metalliska material utgör Rostokers bok ett välkommet hjälpmedel. *G. Björling*

Reports on Progress in Physics. Vol. XX. The Physical Society, London, 1957, Pp. iv+568, 63s. net.

Year Book of the Physical Society 1957. Pp. iv+132, 12s. 6d. net.

Föreliggande volym av Progress innehåller i ordning följande monografier (förf. inom parentes):

The Theory of Plasma Oscillations in Metals (S. Raimes, Dept of Mathematics, Imperial College, London); *The Theory of Liquid* ^{4}He (J. Wilks, Clarendon Lab., Oxford); *High-Energy Protons* (A. E. Taylor, AERE, Harwell); *Theories of Collective Behaviour* (D. Ter Haar, Clarendon Lab.); *K Mesons and Hyperons: Their Strong and Weak Interactions* (R. H. Dalitz, The Enrico Fermi Institute of Nuclear Studies, Univ. of Chicago); *Microwave Properties of Solids* (D. M. S.

Bagguley och J. Owen, Clarendon Lab.); *A Review of the Methods of High-Speed Photography* (J. S. Courtney-Pratt, Research Lab. for the Physics and Chemistry of Surfaces, Dept of Physical Chemistry, Univ. of Cambridge); *Photographic Sensitivity* (J. W. Mitchell, H. H. Wills Physical Lab., Univ. of Bristol); *Theory and Properties of Solid Argon* (E. R. Dobbs och G. O. Jones, Dept of Physics, Queen Mary College, London). — Dessutom ingår innehållsförteckning till vol. 16—20.

Courtney-Pratts uppsats är lättillgänglig. De övriga, med undantag för Mitchells, måste betecknas som arbetsamma. Uppsatserna säljas även i särtryck.

De i årsboken för 1957 avtryckta föredragen (jfr Elementa *40*, 206, 1957) äro följande: *The Physics and Chemistry of Metals* (N. F. Mott); *Meteorites and the Origin of the Solar System* (H. C. Urey); *Observations on the Behaviour of Diffraction Gratings* (J. Guild); *The Magnetic Refrigerator for Temperatures below 1° K* (J. G. Daunt); *The Scale-of-two Counter* (C. E. Wynn-Williams); *The Discovery of the V-Particles and the Properties of the Hyperons* (G. D. Rochester); *K-Mesons* (C. C. Butler); *Measurement of the Velocity of Light* (L. Essen); *The International Geophysical Year* (Harold Spencer Jones); *The Supply and Distribution of Liquid Helium* (E. Mendoza); *Recent Trends in Acoustics* (E. G. Richardson). — Dessutom ingå dödsrunor över bland andra Labouchère Hillyer Bainbridge-Bell, Francis Eugen Simon och John Sealy Edward Townsend. *Torsten Jönsson*

Lothar Wolf, *Erdsatellit und Weltraumfahrt.* Die Behandlung der Mechanik auf der Oberstufe der Höheren Schulen im Hinblick auf die Weltraumfahrt. Praxis-Schriftenreihe, Abt. Physik, Band 5. Aulis Verlag, Frankenberg/Eder, 1958, 75 S., DM 3,95.

Ur förordet: Von allen Teilgebieten der Physik ist die Mechanik ohne Zweifel beim Schüler am wenigsten beliebt. Das ist eine alte Erfahrung, an der sich auch durch die Modernisierung von Experiment und Methode nichts geändert hat. Die Vervollkommnung der Raketentechnik und das damit verbundene wachsende Interesse an der Weltraumfahrt legte jedoch den Gedanken nahe, den Versuch zu machen, die Behandlung der Mechanik auf der Oberstufe unserer Gymnasien nach den physikalischen Grundlagen der Weltraumfahrt auszurichten und so das Interesse der Schüler an der sonst so spröden Mechanik mit diesem roten Faden zu »fesseln».

Den i boken redovisade kursen i satellit- och rymdfartsmekanik har Oberstudiendirektor Wolf prövat sedan 1951.

Förf. anser inte sin bok vara en lärobok i vanlig mening, utan han betraktar den som en handledning för lärare och som en bok för elevers grupparbete. Om man emellertid bortser från de här och var

inströdda metodiska anvisningarna, så är boken en lärobok och en synnerligen stimulerande sådan. Förf. har på ett förträffligt sätt visat hur långt man kan komma med enkel skolmekanik (man kan komma ganska långt), och man har inte minsta anledning betvivla uppgiften att hans elever trivdes med »hemtalen» och inväntade varje lektion med spänning.

Dr Wolfs initiativ bör kanske ses mot bakgrunden av hans landsmäns icke ringa stolthet över de tyska pionjärinsatserna för astronautiken, men det är också en yttring av den friska nybyggarandan inom det västtyska skolväsendet. *Torsten Jönsson*

John Schröder, *Kortvågshandboken.* Nordisk Rotogravyr, Stockholm 1957, 207 s., kr. 16:—, inb. kr. 18:50.

Även denna andra bok i John Schröders radiobokserie (jfr Elementa *40*, 226, 1957) är efter vad anmälaren kan bedöma en verkligt givande litteratur för den praktiskt radiointresserade. En allmän orientering om de korta radiovågornas egenskaper, särskilt hur räckvidden påverkas av t. ex. dygntid, väder och solfläckar, ges koncist men populärt före själva huvuddelen, som innehåller en rad intressanta arbetsbeskrivningar för kortvågs- och ultrakortvågsmottagare, konvertrar, preselektorer och antenner. Formler förekommer inte, däremot många nomogram, diagram och tabeller. Typografin är lika prydlig som i Radiobyggboken, del 1.

Ett vid utgivningen fräsande aktuellt kapitel om satelliter ger boken en rolig tidsprägel. *Stig Mathisson*

Oskar Höfling, *Physik-Aufgaben.* Mittelstufe, 2. Aufl., 72 S., DM 2,95; Oberstufe, 88 S., 3,40. Dümmlers Verlag, Bonn, 1958.

Ovanstående exempelsamlingar har utgivits i anslutning till Höflings läroböcker i fysik, vilka tidigare recenserats i Elementa, *41*, 69, 1958. Samlingarna innehåller vardera 500 uppgifter och skiljer sig från varandra såväl till innehåll som svårighetsgrad. I Mittelstufe finner man problem, som i båda hänseendena rätt väl stämmer överens med övningsuppgifterna i vårt realgymnasiums två första ringar, medan problemen i Oberstufe är mer avancerade samt dessutom täcker och i flera fall överskrider realgymnasiets kurs i fysikalisk problemlösning.

Övningsuppgifterna är i stort sett av ungefär samma svårighetsgrad som de grundläggande typexemplen i svenska fysikläroböcker. Dessutom förekommer särskilt i Oberstufe rätt många uppgifter motsvarande lätta och i någon mån medelsvåra svenska studentuppgifter. Problem av typen svåra studentuppgifter finner man ej. I stället är urvalet desto rikhaltigare. Som exempel kan nämnas problem på rörelsemängd och stötar, tröghetsmoment, speciell relativitetsteori,

kroppars elastiska egenskaper, termodynamik, fysikalisk optik, vissa exempel angående elektriska och magnetiska fält samt atom- och kvantfysik.

Det är givetvis svårt att värdesätta en problemsamling innan man prövat den i undervisningen, men problemen förefaller vara väl valda. De flesta är av praktisk art. Båda böckerna är säkerligen mycket välkomna tillskott till vårt icke alltför rikhaltiga förråd av fysikaliska övningsuppgifter. *Birger Grundström*

Joseph S. Fruton/Sofia Simmonds, *General Biochemistry.* 2nd ed. John Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958, Pp. 1077, $ 18.00.

Det är ganska signifikativt, att denna utmärkta lärobok utkommit i en andra upplaga efter fem års användning. Efter just denna tidsperiod betraktas nämligen läroböcker i ämnet biokemi som föråldrade. Första upplagan av »Fruton och Simmonds» har på dessa sidor (Elementa, *36*, 283, 1953) presenterats i entusiastiska ordalag, och det kan därför anses tillräckligt att konstatera, att författarnas omarbetning skett på samma omsorgsfulla sätt och att boken fortfarande måste betraktas som den bästa biokemiska läroboken på det akademiska högstadiet (licentiat-studier); en förkortad upplaga av »Fruton och Simmonds» skulle säkert få stor användning vid studier för fil. ämbets- och fil. kand.-examina. Antalet sidor i den nya upplagan har ökat med 130 (motsvarande ca 18 %); prisets ökning står dock ej i proportion därtill (80 %).

En jämförelse med den första upplagan visar, att nästan varje sida har genomgått en förändring och många kapitel är helt omskrivna. Nytt är ett kapitel, som bl. a. behandlar pentosfosfatomsättningen. Bland de omskrivna delarna märks bl. a. omsättningsprocesserna för steroider och nukleinsyror. Många kapitel har genomgått stora förändringar, t. ex. proteinstruktur, dehydrogenaser, oxidativ fosforylering, fotosyntes, omsättningsprocesserna för kolhydrater, fettsyror och aminosyror, proteinernas biosyntes, vitaminer. Antalet referenser till originallitteraturen har också utökats väsentligt. Hela framställningen är som väntat i hög grad »up to date» och står ur pedagogisk synpunkt på ett mycket högt plan.

Boken är som tidigare fri från både typografiska och andra felaktigheter. Må det dock tillåtas anmälaren, att i självviskhetens tecken göra författarna uppmärksamma på att den grafiska metod (Fig. 7, sid. 254) för bestämning av Michaelis' konstant, som i andra upplagan kompletterar två tidigare rekommenderade metoder, icke bör betraktas som Eadies metod, då den beskrevs i en svensk doktorsavhandling fyra år tidigare (1948). *Klas-Bertil Augustinsson*

Hugh C. Muldoon/Martin I. Blake, *Systematic Organic Chemistry.* McGraw-Hill Book Company, New York/Toronto/London, 1957, Pp. 828, $ 7.75.

Denna lärobok motsvarar närmast fordringarna för högsta betyg i vår ämbets- och kandidatexamen. I förordet angiver författarna avsikten med boken: »It will give beginners in the field a sound basic knowledge of the science, one that will not only satisfy immediate needs but also serve as a foundation for advanced study either in organic chemistry or in related fields.»

Efter en kort inledning om organiska kemiens utveckling samt allmänt om organiska ämnens egenskaper följer en lättläst orientering (15 s.) om atomens byggnad och olika typer av kemisk bindning; där förklaras bl. a. vinkeln mellan bindningarna i vatten, borföreningar och kolföreningar.

De alifatiska föreningarna (435 s.) behandlas i tjugo kapitel. Relativt stort utrymme ägnas åt mättade och omättade kolväten (74 s.) samt åt kolhydrater (50 s.).

De karbocykliska föreningarna (175 s.) omfatta huvudsakligen viktigare bensenderivat. Dessa derivat få genomgående beteckningen aromatiska, under det att de aromatiska föreningar, som äro derivat av difenyl, naftalin m. fl. benämnes »Polynuclear Compounds». Av texten framgår dock att de i kemiskt hänseende visa stora likheter med bensen.

De heterocykliska föreningarna (35 s.) redovisas i två kapitel. I det första behandlas femringar med en och två heteroatomer samt sexringar med en heteroatom, huvudsakligen pyridinderivat. Med ledning av angivna resonansformer diskuteras de kemiska egenskaperna hos tiofen, pyrrol och pyridin. Det andra kapitlet ägnas åt sexringar med två heteroatomer, huvudsakligen barbitursyraderivat (tabellöversikt omfattande 18 derivat) och folinsyra. Slutet av kapitlet omfattar derivat av indol och purin.

Efter behandling av terpener (12 s.) och alkaloider (25 s.) följer en översikt över syntetiska färgämnen (17 s.). I nästa avsnitt (15 s.) presenteras viktigare enzym (med tabellöversikt) och antibiotika (penicillin, streptomycin, chloromycetin samt tetracyclinderivaten achromycin, aureomycin och terramycin).

Bokens avslutande kapitel (20 s.) har rubriken »Steroids. Hormones. Natural Pigments. Vitamins». I en översikt omfattande 16 vitaminer hänvisas till de avsnitt i boken, där dessa ämnen mera utförligt behandlats.

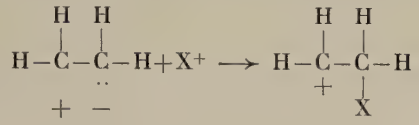
I ett appendix (8 s.) förklaras ett hundratal medicinska fackord samt uppräknas de flesta av de textböcker (ca. 200 st.), som använts vid utarbetandet av boken. Sakregistret (48 s.) innehåller ca. 6 000 hänvisningar.

Vid en snabb genomläsning konstaterades, att framställningen i en del fall är oklar eller missvisande. Följande exempel må nämnas.

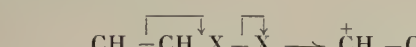
Vid diskussion av halogensubstituerade karbonsyrors styrka påpekas, att klorens induktiva effekt inverkar endast om klor är bunden till α-kolatomen. Skillnaden i styrka hos t. ex. β-klorsmörsyra ($K_s = 9 \cdot 10^{-5}$) och smörsyra ($K_s = 1.5 \cdot 10^{-5}$) tyder dock knappast på att induktiva effekten försvinner så plötsligt.

Begreppet resonans är så framställt, att läsaren kan få den uppfattningen, att molekylens struktur pendlar mellan de olika resonansformerna.

Addition av halogen till etylen återgives med formeln



Det är svårt att inse varför dessa symmetriska molekyler uppträda på detta sätt. En riktigare bild erhålles genom nedanstående formel (enl. M. J. S. Dewar) samt tillägget att reaktionen kräver ett polärt lösningsmedel (eller yta).



I kapitlet monosackarider redogöres för specifika vridningen för en optiskt aktiv substans. Den angives bl. a. bero på lösningens koncentration och vätskepelarens längd. Uppgiften hade verkat mindre förbryllande om exempel hade fått belysa koncentrationens inverkan. Att pelarens längd skulle inverka på specifika vridningen förefaller osannolikt.

Boken är i övrigt trevligt skriven och överskådligt uppställd. Den är rikligt försedd med tydliga underrubriker och formlerna, som äro tryckta i halvfet stil, äro väl skilda från texten. Framställningen tynges ej av alltför detaljerad beskrivning av ett stort antal ämnen; huvudvikten har i många fall lagts på allmänna framställningsmetoder och egenskaper för ämnesklassen. För ett stort antal ämnen belyses betydelsen genom angivande av de mängder, som tillverkas eller förbrukas (siffrorna avse amerikanska förhållanden). Varje kapitel avslutas med övningsuppgifter och problem.

Litteraturhänvisningar saknas helt. I många fall hade läsaren kunnat hänvisas till lämpligt avsnitt i någon av de uppräknade textböckerna.

Boken innehåller mycket av värde och är av intresse för såväl nybörjaren som för den som önskar repetera och något modernisera tidigare inhämtade kunskaper. *Lars Sihlbom*

Åke Wallenquist, *Astronomi.* Den moderna astrofysikens resultat och forskningsmetoder. Sv. Bokförlaget (Bonniers), Stockholm, 1958, 309 s., kr. 28: —.

I serien »Scandinavian University Books» har observator Åke Wallenquist vid Astronomiska observatoriet i Uppsala utgivit en omarbetning av sin bok från 1951 »Den moderna astronomien och dess världsbild» (Forum). Under de senaste åren har mycket hänt på de astronomiska forskningsfälten, tack vare bl. a. nya jätteinstrument, rymdraketer och radioastronomi, och en omarbetning av den äldre boken har varit fullt motiverad. Därjämte har ett appendix bifogats, som i matematisk form behandlar vissa av textens mera populärt behandlade partier.

Wallenquists nya arbete avser i likhet med det tidigare att ge en framställning av de resultat den moderna astrofysiken kommit till och den världsbild man kunnat skissera. Tyngdpunkten är lagd på stjärnornas fysiska förhållanden sådana de återspegla sig i färger, temperaturer, spektra, ljusstyrkor och ljusvariationer och på de slutsatser man härur dragit om uppbyggnaden av vårt vintergatsystem.

Inom detta område av astronomien är Wallenquist som bekant specialist, något som lätt avslöjar sig i framställningens elegans och förmågan att popularisera även svårfattliga rön. Bokens bildmaterial, i form av fotografier — delvis härrörande från förf.:s egna arbeten — och diagram, är instruktivt och mycket tilltalande.

Man är tacksam mot Wallenquist för hans nya arbete. De småfel jag funnit vid genomläsningen, t. ex. beträffande området för streckningen av synligt ljus i fig. 2: 1, ekvatorsplan i stället för banplan s. 93 vänstra spalten och kraft i stället för acceleration s. 284 v. spalten, äro lätt observerade och bagatellartade. Boken klarlägger många grundbegrepp och är också kursbok vid den grundläggande undervisningen i astronomi vid våra universitet. *B. Svenonius*

Sture Lövgren, *Atomernas historia.* Del 1. Atomernas upptäckt, 62 s., kr. 7: 50. Del 2. Isotoper i naturen, 17 s., kr. 2: 50. FörlagsAB Västra Sverige, Göteborg 1957.

Författaren till den förträffliga *Teknisk Varukännedom* uppträder här som lärdomshistoriker och börjar liksom stora tyska gedigna verk redan före Moses för att sedan ömsom hurtfriskt, ömsom gravitetiskt med mängder av parenteser berätta om de insatser i atomernas utvecklingshistoria, som enligt hans åsikt tydligen gjordes av Galilei, Paracelsus, Bacon m. fl. Till mycket av denna visdom ställer jag mig frågande. Vad menas t. ex. med upplysningen, att svaret på frågan om atomernas uppkomst »i äldre tider överläts på prästerskapet, som var

sin tids kulturella elit»? Sin tids? — Det som står om Wöhler, som »hopsatte» urinämne »uteslutande av kol, syre, kväve och väte från (det icke levande) stenriket (mineralriket) på sitt laboratorium med användande endast av atomernas kemiska krafter (valenser)» ger mig uppfattningen, att förf. missförstått Wöhlers *upptäckt*, att ammoniumcyanat kan omlagras till karbamid. Ett misstag ligger också bakom uppgiften, att Davy framställde bor genom elektrolys av smält salt.

I den kronologiska översikten över »den modärna atomkemins period» står, att Urey upptäckte tungt vatten 1941, att Lewis starkt betonade oktettformen (!) som orsak till atomernas valenser, och att varje kraftcentrum är ett vågknippe enligt vågmekaniken, som sedan utformades av »Heisinger». Större respekt för fakta, begrepp och namn kan krävas även i ett arbete som vill vara populärt.

Referatet av Arrhenius' doktorsdisputation kan jag inte förbigå. Det är inte riktigt, att A. gjorde sina arbeten i Tyskland — de utfördes under prof. Edlunds ledning i Stockholm. Det är inte riktigt, att Ostwald »grep in» och »skrev till herrarna i Uppsala och lovade att röra upp himmel och jord», om inte A. *fick* disputera. Ostwald läste nämligen avhandlingen först den 19 juni 1884, och disputationen hade ägt rum den 26 maj. Det är inte heller riktigt, att A. blev godkänd »men med lägsta möjliga betyg (B)». A. fick som bekant Ba på avhandlingen och AB på försvaret. Hur förf. kan veta, hur replikerna föllo under själva disputationen, skulle medlemmarna av familjen Arrhenius gärna vilja ha reda på! De förlåta då säkert uttrycket »den unge valpen» om respondenten.

I del 2 ges i en tabell data om antalet isotoper, deras fördelning i procent, upptäckare osv. Kol 14 är inte omnämnt. Denna liksom andra anmärkningar här kunna synas småaktiga. Men jag har med några valda exempel velat visa, hur okritiskt författaren gått till väga. Det intresseväckande innehållet, den personliga stilen, de roande och förbryllande inpassen kunde annars ha gjort detta arbete till en läsning, som en lärare velat rekommendera åt sina elever. Nu är detta omöjligt.

Bertil Englund

James S. Fritz / George S. Hammond, *Quantitative Organic Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957, Pp. 303, $ 6.50.

Denna bok är i första hand avsedd att vara en lärobok i kvantitativ organisk analys. Den innehåller alltså ej detaljerade metodbeskrivningar för bestämning av olika funktionella grupper utan ger endast de principiella grunderna för sådana analyser. Det största utrymmet har ägnats åt titreringar av olika slag. Där behandlas syra-bastitreringar i andra lösningsmedel än vatten, förtvålningar, perjodatoxida-

tioner, reduktions- och oxidationstitreringar etc. Vid diskussionen av de olika analysmetodernas användbarhet har författaren även ägnat kinetiska problem stort intresse. Många organiska reaktioner, oximering, hydrering etc. kan ju vara mycket långsamma och en kännedom om användningen av kinetiska data för val av lämpliga försöksbetingelser är därför av betydelse.

Bland fysikaliska metoder behandlas huvudsakligast spektrofotometri och polarografi och exempel ges på problem, som kan lösas med hjälp av dessa metoder.

I slutet av boken har samlats ett antal väl valda laborationsövningar huvudsakligen behandlande titreringar av olika slag.

Axel Johansson

Karl Adolf Becker/Helmut Strack, *Chemiefaserstoffe.* Praxis-Schriftenreihe. Abteilung Chemie. Band 3. Aulis Verlag, Frankenberg/Eder, 1957, 64 S., DM 3.50.

Denna lilla skrift är enligt förordet avsedd för lärare, som äro intresserade av de kemiska textilfibrerna. Dessa omfatta dels fibrer, uppbyggda av regenererad eller förestrad cellulosa, dels syntetfibrer. De senare bestå av lineära makromolekyler, erhållna av polyestrar, polyamider eller polyakrylnitriler. Förff. redogöra med diagram och kemiska formler för framställning av olika fibertyper och belysa deras kemiska och fysikaliska egenskaper med enkla kvalitativa försök. Framställn. är elementär och kräver knappast djupare kunskaper i organisk kemi än vad vår gymnasiekurs ger. Skriften avslutas med ett sakregister, innehållande bl. a. en mångfald handelsnamn (dock mest tyska) på de nu så aktuella syntetfibrerna, av vilka ju flera ofta omnämnas i dagspressen. Det lilla häftet kan rekommenderas till både kemilärare och intresserade elever. *Evald Samén*

Roland Kiessling, *Atomreaktorer och deras materialproblem.* Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Pedagogisk skriftserie nr 8, Stockholm 1957, 32 s., kr. 2:—. — Erhålles enklast genom insättning av beloppet på postgiro 858 25, adj. J. Isander, Bromma.

Docent Kiessling lämnar här en koncis och särdeles instruktiv sammanfattning av det föredrag, som han höll vid Föreningens årsmöte 1957 och som då mottogs med största intresse. De olika reaktortyperna, den kemiska framställningen av bränslet, strålningsdestruktionen äro några av de högaktuella frågor, som belysas. Det förutsättes, att läsaren känner det allmänna om kärnreaktioner. Skriften kan rekommenderas åt alla gymnasielärare i fysik och kemi. *Bertil Englund*

A. F. Wells, *The Third Dimension in Chemistry*. University Press, Oxford, 1956, Pp. 144, 21 s. net.

Varför intresserar det en strukturkemist på hur många sätt ett plan kan delas upp i kongruenta konvexa polygoner eller hur många möjligheter det finns att packa klot i en låda? Och vad har ett tapetmönster för betydelse för en kristallograf? Dessa och andra lika oväntade och till synes abstrakta problemställningar belyser Wells i sin på en gång skarpsinniga och charmerande lilla bok. De kemiskt betonade slutkapitlen om jonkristaller samt om ändliga och oändliga molekyler visa värdet av att kunna tänka i mer än två dimensioner. De stereoskopiska fotografierna av kristallmodeller och rymdfigurer äro särdeles instruktiva.

Bertil Englund

Forts. sid. 246

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

2167) *Varje dignitet av* $\sqrt{2}-1$ *kan skrivas* $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$.

The Amer. Math. Monthly

2168) *Punkterna B och C delar cirkelbågen ABCD i tre lika delar. En cirkelbåge AD tangerar kordan AC och är belägen inom trapetset ABCD. Den av cirkelbågarna bildade »månskäran» har samma yta som parallelltrapetset. Sök villkoret härför.*

Efter Hippokrates, 5:e årh. f. K.

2169) *I triangeln ABC är höjderna* AA_1, BB_1, CC_1. *Ange avståndet mellan medelpunkterna för cirklarna ABC och* $A_1B_1C_1$ *som funktion av R och vinklarna A, B, C. Visa, att det minsta av avstånden från hörnen A, B, C till sidorna* B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 *understiger summan av de båda andra med radien i cirkeln ABC, om de nämnda cirklarna är ortogonala.*

V. Thébault

Enklare matematiska uppgifter[2]

2170) I en likbent triangel är den inskrivna cirkelns diameter fjärde proportionalen till omkretsen, basen och en av de lika sidorna. Bestäm triangelns vinklar.

Svar: Basvinkeln är 30°.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kan insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm Ö.

[2] Uppg. 2171, 2178 är insända av *X.*, 2170, 2172, 2173, 2174, 2177 av *S. B.*, 2175, 2176 av *I. Gunsjö.*

2171) I en aritmetisk serie med obegränsat antal termer är summan av alla termer med ensiffrigt nummer 100 och summan av alla termer med tvåsiffrigt nummer 100^2. Beräkna summan av alla termer med tresiffrigt nummer.

Svar: 100^3.

I allmänhet är summan av termer med n-siffrigt nummer 100^n.

2172) I en geometrisk serie är summan av de nio första termerna 73 gånger så stor som summan av de tre första. Summan av de 18 första termerna är lika med summan av de nio första termernas kvadrater. Beräkna första termen.

Svar: 3 eller $1-\sqrt[3]{9}$.

2173) I en likbent triangel är avstånden från den omskrivna cirkelns medelpunkt till sidorna 3 cm, 3 cm och 7 cm. Beräkna vinklarna.

Svar: Basvinkeln är 70,53°.

2174) Sidorna AB och AC i triangeln ABC går genom punkterna $(-1; 3)$ resp. $(3; -1)$. Sidan BC som är parallell med x-axeln går genom punkten $(0; -2)$. Bisektrisen till vinkeln A ligger på y-axeln. Beräkna ytan.

Svar: 24,5 ytenh.

2175) En korda AB parallell med x-axeln avskär av parabeln $y=x^2$ ett segment med ytan A_1. I segmentet inskrives dels en triangel med med två hörn i A och B och maximiyta A_2, dels en rektangel med två hörn på AB och maximiyta A_3. Visa, att $A_1 : A_2 : A_3 = 12 : 9 : 4\sqrt{3}$.

Resultatet gäller även för en godtycklig korda, vilket inses, om den med AB parallella tangenten tages till x-axel och diametern genom tangeringspunkten till y-axel.

2176) Räta linjerna $y=2x$ och $y=2x+l$ skär parabeln $y=x^2$ i origo O och punkten A resp. B och C (B under C). Bestäm l, så att ytan av trapetset $OBCA$ blir ett maximum.

Svar: $l=-\frac{8}{9}$.

2177) En ellips, vars axlar ligger på koordinataxlarna, går genom punkten (3; 1). Sök minimivärdet av ellipsens yta.

Svar: 6 π ytenh. Svaret blir $2\pi|pq|$, om ellipsen går genom punkten $(p; q)$.

2178) Genom punkterna (0; 0), (1; 0) och (5; 0) drages linjer som bildar en liksidig triangel. Sök maximum för dess sida.

Svar: $\sqrt{28}$ längdenh.

Lösningar till uppg. 2143—2145

2143) *I en given cirkel är inskriven en triangel ABC, i vilken* $b+c=ma$, *där* m *är ett givet tal* > 1. *Sök enveloppen för linjen BC, då hörnet A är fixt.* *X.*

Bisektrisen till vinkeln A råkar BC i E. Enligt bisektrissatsen är $BE=c/m$ och $CE=b/m$. Väljes B_1 på AB så, att $BE^2=BB_1\cdot BA$, blir $BB_1=c/m^2$. Orten för B_1 är en cirkel likställd med cirkeln ABC (radie R) med avseende på A och med radien $R-R/m^2$. Denna cirkel tangerar BC och är den begärda enveloppen, ty om två cirklar tangerar varandra innantill i A och en korda BC i den större tangerar den mindre i E, är $BE^2=c$. $BB_1=c^2/m^2$ och $CE^2=b$. $CC_1=b^2/m^2$, varför $b+c=ma$, när skalan är $(1-1/m^2):1$. *S. B.*

Även löst av *N. J., Sb., H. Simonsson*

2144) *Man har* $x+y+z=0$. *Två konjugattal tecknas* u, $\bar{u}$. *Sök enkla samband mellan de cykliska summorna a)* $\Sigma x\bar{x}$ *och* $\Sigma(x-y)(\bar{x}-\bar{y})$ *b)* $\Sigma x^2\bar{x}^2$ *och* $\Sigma(x-y)^2(\bar{x}-\bar{y})^2$. *X.*

I. a) Den andra summan kan skrivas $\Sigma x\bar{x}+\Sigma y\bar{y}-\Sigma x\bar{y}-\Sigma\bar{x}y=$ $=2\Sigma x\bar{x}-\Sigma x(\bar{y}+\bar{z})=3\Sigma x\bar{x}$, ty $\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}=0$.

b) Antag, att x, y, z är rötter till ekvationen $s^3+ps-xyz=0$. Då är $\Sigma xy=xy+z(x+y)=xy-z^2=p$ och $\Sigma x^2=(\Sigma x)^2-2\Sigma xy=-2p$. Enär $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$, kan den senare summan omformas till $\Sigma(3z^2+4p)(3\bar{z}^2+4\bar{p})=9\Sigma x^2\bar{x}^2+12\bar{p}(-2p)+12p(-2\bar{p})+48p\bar{p}=9\Sigma x^2\bar{x}^2$.

Är G tyngdpunkten i triangeln ABC och betecknas AG med d_a osv, så innebär de funna sambanden: $3\Sigma d_a^2=\Sigma a^2$; $9\Sigma d_a^4=\Sigma a^4$. *X.*

II. Enligt mediansatsen är $a^2=2d_b^2+2d_c^2-d_a^2$ (1), varav genom addition $\Sigma a^2=3\Sigma d_a^2$. Kvadrering av (1) och addition ger $\Sigma a^4=9\Sigma d_a^4$. *S. B.*

Även löst av *L. Arkeryd, E. Samén, H. Simonsson*

2145) *I triangeln ABC med ytan T är medianen* $AM=m_a$. *Beräkna avståndet mellan fokus och styrlinje i den parabel, som tangerar AB och AC i B resp. C.* *V. Thébault*

I. Den med BC parallella tangenten B_1C_1 (B_1 på AB, C_1 på AC) halverar medianen i kontaktpunkten K. Cirkeln AB_1C_1 går genom fokus F. Sätt $\angle C_1AF=BAM=\alpha$, $\angle B_1AF=CAM=\beta$, $\angle AMB=\gamma$ och låt R vara radien i cirkeln ABC. Enligt sinusteoremet är $C_1F=R\sin\alpha$ och normalen från F mot AC (med fotpunkten på vertextangenten) $C_1F\sin\gamma$. Avståndet ($=x$) från F till vertex blir $C_1F\sin\beta\sin\gamma$. Enligt ytteoremet är $T=bm_a\sin\beta=cm_a\sin\alpha=\frac{1}{2}am_a\sin\gamma$. Härav fås $x=2R\cdot T/am_a\cdot$ $\cdot T/bm_a\cdot T/cm_a=\frac{1}{2}T^2/m_a^3$ och svaret T^2/m_a^3. *S. B.*

II. Lägg K i origo, positiva x-axeln utefter KM, y-axeln utefter B_1C_1. Enligt känd formel är det sökta avståndet $y^2 \sin^2 \gamma/2\ x$, där $(x; y)$ är en godtycklig punkt på parabeln. Välj B med $x=\frac{1}{2}\ m_a$, $y=\pm\frac{1}{2}\ a$ och inför höjden h_a från A. Då fås svaret $a^2 h_a{}^2/4\, m_a{}^3 = T^2/m_a{}^3$. *X.*

Även löst av *A. T., Sb., E. Samén, H. Simonsson*

Fyllnadsprövning efter studentexamen

Augusti 1958

Matematiska uppgifter[1]

Reallinjens matematiska gren

1. Sök ekvationen för spegelbilden av den räta linjen $x+2y+1=0$ med avseende på linjen $3x+y-6=0$, vilken betraktas som en plan spegel.
2. En mur är 5 m hög och går i riktningen nordost-sydväst. En dag, då solen står rakt i söder, är murens skugga 3 m bred, mätt vinkelrätt mot murens längdriktning. Beräkna solens elevationsvinkel.
3. Kurvorna $y=3x^2$ och $y=4x^3$ har utom x-axeln ytterligare en gemensam tangent. Bestäm dennas ekvation.
4. En rät linje med ekvationen $x=h$ avskär av hyperbeln $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ ett segment. Beräkna volymen av den kropp, som genereras, då detta segment roterar kring x-axeln.
5. För vilka värden på konstanten a betyder ekvationen $(a+2)x^2-ay^2-4x-4y-1=0$ en ellips, en parabel respektive en hyperbel? — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att undersökningen genomföres mera detaljerat. Därvid kan bl. a. för en ellips anges läget av storaxeln och för en hyperbel läget av transversalaxeln.
6. På kurvan $y=a^x$, där $a>0$, tages en följd av punkter P_1, P_2, P_3, ..., P_n, vilkas abskissor utgör termer i en aritmetisk serie. Bevisa, att ordinatorna för punkterna P_1, P_2, P_3, ..., P_n utgör termer i en geometrisk serie och riktningskoefficienterna för kordorna P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}P_n$ termer i en annan geometrisk serie.
7. En rät cirkulär kon med bottenytan B och mantelytan M ligger på ett horisontellt plan, som den tangerar utefter en generatris. Konen

[1] Enligt gymnasiereformen av år 1953, som tillämpas vid studentexamen fr. o. m. v. t. 1957.

får rulla på underlaget med spetsen fix, tills den första gången på nytt tangerar underlaget längs samma generatris som i utgångsläget. Beräkna längden L av den väg, som bottenytans medelpunkt beskriver under rörelsen, uttryckt i B och M. Om B antas ha ett givet värde, bestäm

$$\lim_{M\to B} L \quad \text{och} \quad \lim_{M\to\infty} L$$

8. En kurva $y=f(x)$ går genom punkten (1; 1) i ett rätvinkligt koordinatsystem. Riktningskoefficienten för normalen i en godtycklig punkt på kurvan är direkt proportionell mot kvadraten på punktens x-koordinat. Bestäm $f(x)$, och diskutera kurvans utseende.

Resultat: **1.** $2x-y-10=0$. **2.** 49,7°. **3.** $144x-27y-64=0$. **4.** Av symmetriskäl kan man inskränka sig till $h>a$, då volymen är $\pi b^2(h-a)^2(h+2a):3a^2$ vol.enh. **5.** Med beteckningarna $E(y)$, $H(y)$ och $P(y)$ för ellips, hyperbel, parabel med resp. storaxel, transversalaxel och axel parall. med y-axeln erhålles: 1) $a<-4$, $H(y)$ 2) $-4<a<-2$, $H(x)$ 3) $a=-2$, $P(x)$ 4) $-2<a<-1$, $E(x)$ 5) $-1<a<0$, $E(y)$ 6) $a=0$, $P(y)$ 7) $0<a<2$, $H(y)$ 8) $2<a$, $H(x)$. Anm. $a=-4$ ger två räta linjer, likaså $a=2$; $a=-1$ ger en cirkel. **7.** Man finner $L=2\sqrt{\pi B}\ (1-B^2/M^2)$ och limesvärdena 0 och $2\sqrt{\pi B}$ resp. **8.** $f(x)=1/kx-1/k+1$, där k är proportionalitetsfaktorn. Kurvorna är liksidiga hyperbler med y-axeln som ena asymptot. Då $k\to\infty$ och $k\to 0$, närmar sig hyperblerna mot $y=1$ resp. $x=1$.

Reallinjens biologiska gren

1. Undersök kurvan $y=x^4-2x^2+1$ med avseende på maximi- och minimipunkter, samt konstruera den i dess huvuddrag. Beräkna därefter ytan av det ändliga område, som begränsas av x-axeln och kurvan.
2. En fyrsidig pyramids basyta är en rektangel. Beräkna förhållandet mellan två närliggande sidor i rektangeln, då pyramidens sidoytor i ordning bildar vinklarna 40°, 50°, 40° och 50° med basytan.
3. Bestäm den positiva konstanten a så, att kurvan $y=2x^3+ax^2$ tangerar den räta linjen $2x+y=0$. Upprita därefter kurvan med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter.
4. En likbent triangel med given omkrets får rotera kring basen. Hur stor skall triangelns toppvinkel vara, för att den uppkomna rotationskroppens volym skall bli så stor som möjligt?
5. I triangeln ABC är sidan BC 6 cm och sidan AB dubbelt så stor som sidan AC. Undersök, mellan vilka gränser sidan AC kan variera. Bestäm därefter denna sidas längd, då triangelns yta är så stor som möjligt.

6. P är en punkt i första och Q en punkt i tredje kvadranten i ett rätvinkligt koordinatsystem. Från P och Q fälles normalerna mot koordinataxlarna, varvid två rektanglar med gemensamt hörn i origo uppkommer. Den räta linjen PQ skär koordinataxlarna i punkterna A och B. Bevisa, att om de nämnda rektanglarna har lika stora ytor, så är sträckan AP=sträckan QB.
7. Se matem. gren 6.
8. En kurva har i ett rätvinkligt koordinatsystem ekvationen $2x^2-$ $-2y-7=0$. Undersök, hur antalet normaler till kurvan från en punkt P på x-axeln varierar, när P genomlöper nämnda axel.

Resultat: 1. Kurvan, som ligger symmetriskt kring y-axeln, har max. i $(0;1)$ och min. i $(\pm1;0)$; ytan är $\frac{16}{15}$ ytenh. 2. tg 50°/tg 40°= $=1{,}420$. 3. $a=4$; max. i $(-\frac{4}{3};\frac{64}{27})$, min. i origo. 4. 38,94°. 5. Mellan 2 cm och 6 cm; ytan är störst för $AC=2\sqrt{5}$ cm. 6. Om $P(x_1;y_1)$ och $Q(-x_2;-y_2)$, så delas PQ (från P räknat) av y-axeln i förh. $x_1:x_2$ och (från Q räknat) av x-axeln i förh. $y_2:y_1$, vilka förh. är lika, då rektanglarna är lika stora. 8. Om p är P:s abskissa, gäller för områdena $|p|>4$, $|p|=4$ och $|p|<4$ resp. 1, 2 och 3 normaler.

Allmänna linjens sociala gren

1. I ena ändpunkten A av diametern AB i en cirkel med medelpunkten O och radien 1 m drages tangenten till cirkeln. En radie, som bildar 30° vinkel med OA, utdrages, tills den skär den nyss nämnda tangenten i punkten C. På tangenten avsättes en sträcka $CD=3$ m, varvid punkterna C och D ligger på var sin sida om punkten A. Visa, att längden av sammanbindningslinjen BD är approximativt lika med längden av cirkelbågen AB.

2 och 3. Se biol. gren 1 och 2.

4. En likbent triangel med omkretsen 8 cm får rotera kring basen. Bestäm triangelns sidor så, att den uppkomna rotationskroppens volym blir så stor som möjligt.
5. Se biol. gren 3.
6. En person utlånade vid ett årsskifte en viss summa mot inteckning i en fastighet, dvs. en del av fastigheten ställdes som säkerhet för lånet. Enär fastigheten var besvärad av flera inteckningar med förtursrätt före den nämnda inteckningen, var utlåningen förbunden med en viss risk, varför långivaren betingade sig 7,5 % ränta, medan han eljest inte kunde placera sina pengar mot mer än 5 % ränta. Inbetalningen skulle ske vid årsskiftena, första gången ett år efter utlåningen. Vid årsskiftet 25 år efter utlåningen inträffade det, sedan räntan i vanlig ordning betalats, att inteckningen blev värdelös, enär låntagaren då inställde betalningarna och fastighe-

ten måste säljas till ett sådant pris, att långivaren inte erhöll något av försäljningssumman. Kan långivaren anses vara kompenserad för den av betalningsinställelsen förorsakade förlusten av det utlånade kapitalet genom den uppburna relativt höga räntan?

7 och 8. Se biol. gren 6 resp. matem. gren 6.

Resultat: 4. 2 cm, 3 cm, 3 cm. 6. Ja; det räcker med 7,1 %.

Matematiska uppgifter för latin- och realgymnasiet

Enl. 1933 års stadga

Latingymnasiet

1. Gränsen mellan Nord- och Sydkorea utgöres av den del av 38:e parallellen, dvs. parallellcirkeln på 38° nordlig latitud, som ligger mellan 125,1° och 128,7° östlig longitud från Greenwich. Beräkna längden av denna gräns. Jorden betraktas som en sfär, och ekvatorns längd sättes=4 000 mil.
2. Beräkna summan av den oändliga serien

$$1-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}-\frac{3}{64}+\frac{1}{8}+\frac{3}{256}+\ \ldots$$

3. Bestäm konstanterna a och b i funktionen $y=a+bx-x^2$ så, att den mot funktionen svarande kurvan går genom punkterna $(-1;0)$ och $(0;2)$. Upprita kurvan, och ange med hjälp av diagrammet eller på annat sätt det största värde, som y kan anta.
4. Lös ekvationen

$$\frac{3x-2}{x^2+3x+9}+\frac{3x^2-x+3}{27-x^3}+\frac{1}{x-3}=0$$

och pröva, om de erhållna värdena satisfierar ekvationen.

5. Se social gren 1.
6. För att bestämma avståndet från en punkt A till en därifrån oåtkomlig punkt B mäter man upp en sträcka $AC=60$ m i en sådan riktning, att vinkeln $BAC=120{,}80°$. Från punkten C uppmätes en annan sträcka $CD=80$ m så, att vinkeln $ACD=38{,}63°$. Man finner då, att vinkeln CDB är $92{,}37°$. Beräkna avståndet AB. Alla punkterna antas ligga i samma horisontalplan.
7. AB är en diameter och AC en korda i samma cirkel; $AC:AB=2:3$. Kordan CD skär AB i en punkt E, så att $AE:EB=3:1$. Bestäm längden av kordan CD, om cirkelns radie är r cm.
8. Två cirklar har radierna 7 cm och 9 cm. Centrallinjen, dvs. sammanbindningslinjen mellan medelpunkterna, är 14 cm och skär

cirklarna i punkterna A respektive B. En gemensam tangent till cirklarna tangerar dem i punkterna C respektive D. Beräkna ytan av fyrhörningen $ABCD$.

Resultat: 1. 31,5 mil. 2. 1,4. 3. $a=2$, $b=1$; $y_{\max}=2{,}25$. 4. $x=4$ ($x=3$ satisfierar ej). 6. 36,5 m. 7. $38r/21$ cm. 8. $36\sqrt{3}$ cm^2=62,35 cm^2.

Realgymnasiet. Allmän kurs

1, 2, 3 och 4. Se biol. gren 2, 3, 4 och 5.

5. Bestäm $\operatorname{tg} x$ ur ekvationen $\sin(x+v)+\cos(x-v)-\cos(x+v)=0$, och beräkna därefter de värden på x, för vilka $\operatorname{tg} x=-\sin v$.

6 och 7. Se biol. gren 6 och 8.

8. Man önskar tillverka en i båda ändar öppen rät cirkulär cylinder av ett plåtstycke, som har formen av en triangel med ytan T cm^2, sidorna a, a' och a'' cm samt motsvarande höjder h, h' och h'' cm. Man utskär då en rektangel ur plåtstycket på så sätt, att en av rektangelns sidor ligger utefter en av triangelns sidor vilken som helst. När rektangeln sedan skall hopböjas till mantelytan i cylindern, kan man välja antingen den ena eller den andra rektangelsidan till höjd i cylindern. Hur stor är volymen av den största cylinder, som på detta sätt kan erhållas, om triangelns sidor är 13, 14 respektive 15 cm?

Resultat: 5. $\operatorname{tg} x=-\sin v:(2\sin v+\cos v)$; $x_1=n\cdot 180°$, $x_2=141{,}34°+n\cdot 180°$. 8. Max.volymen blir $2aT/27\pi$ cm^3, när rektangelns ena sida ligger utefter sidan a och rektangelns andra sida väljes till höjd i cylindern, och $2hT/27\pi$ cm^3 i andra fallet. Då den största sidan är större än den största höjden, erhålles den största volymen för det största a-värdet. — I specialfallet blir max.volymen$=280/3\pi$ cm^3= =29,71 cm^3.

Realgymnasiet. Specialkurs

1. Hur stor är excentriciteten för en ellips, om den vinkel, under vilken en halvparameter synes från ellipsens medelpunkt, är dubbelt så stor som den spetsiga vinkel, som tangenten i en ändpunkt av en parameter bildar med storaxelns förlängning?

2. Bestäm de värden, som funktionen $y=\dfrac{4}{x\sqrt{5-x^2}}$ inte kan anta.

3. Upprita kurvan $x^2y=4$ i dess huvuddrag. Bestäm därefter ekvationen för en cirkel, som tangerar x-axeln och kurvans båda grenar.

4. Upprita kurvan $y=\sin x$ för $0\leqq x\leqq 2\pi$. Genom origo går två tangenter till den uppritade kurvdelen. Beräkna vinkeln mellan dessa tangenter på 0,1° när.

5. Bestäm ekvationen för en hyperbel, som har sina vertices i punkterna (1; 2) och (−1; −2) samt har y-axeln till asymptot.
6. Två parabler, som har gemensam styrlinje L och brännpunkterna på en mot L vinkelrät linje L', är givna. En rät linje, parallell med L', skär parablerna i två punkter. Sök och konstruera orten för skärningspunkten mellan tangenterna i dessa punkter.
7. Undersök kurvan $y=x^4-8x^3+6ax^2$ för olika värden på konstanten a med avseende på skärningspunkter med x-axeln, maximi- och minimipunkter samt inflexionspunkter. Upprita i stora drag exempel på de olika typer, som erhållits vid undersökningen.

Resultat: **1.** $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=0{,}5176$. **2.** Funktionen kan inte anta värden mellan −1,6 och 1,6. **3.** $x^2+y^2-3y=0$ är *en* sådan cirkel. **4.** 57,3°. **5.** $3x^2-4xy+5=0$. **6.** Orten utgöres av mittpunktsnormalen N till sträckan mellan brännpunkterna men av h e l a N endast om brännpunkterna ligger på var sin sida om L. Befinner de sig på samma sida, skär parablerna varandra i punkter som ligger på N, och man får utesluta den del av N som ligger inom parablerna. **7.** I. För $a<0$ tang. kurvan x-axeln i origo och skär den i två punkter, på neg. resp. pos. x-axeln; för $a=0$ faller den förra i origo, som nu är terrassp.; för $0<a<\frac{8}{3}$ ligger bägge skärningsp. på pos. x-axeln, där de sammanfaller för $a=\frac{8}{3}$. För $a>\frac{8}{3}$ finns inga skärningsp., endast tg.p. i origo; här ligger kurvan ovanför (under) x-axeln för a pos. (neg.). II. För $a>3$ endast min.p. i origo; för $a=3$ dessutom en terrassp. i (3; 27); för $0<a<3$ en max.p. och en min.p. (utom origo) för pos. x; $a=0$ en terrassp. i origo och en min.p. för pos. x; för $a<0$ en max.p. i origo och två min.p. för resp. ett pos. och ett neg. x-värde. III. Inflexionspunkter saknas för $a>4$, för $a<4$ finns två, vilka sammanfaller i en flachpunkt (2; 48), då $a=4$. — Det finns endast tre väsentligt olika kurvtyper (Se Elementa, *38*, 241, 1955). De vänder alla öppningen uppåt. 1) $a>4$, uppåt konkav kurva 2) $a=4$, uppåt konkav med flachpunkt i »toppen» (2; 48) 3) $a<4$, kurvor med två infl. och dubbeltangent med reella kontakter.

Uppgifter i fysik

1. En elektriskt driven motorvagn med vikten 15 ton startar från en station och går 500 m på en bana, som i genomsnitt lutar 3 : 1000 utför. Hastigheten, som icke varit likformigt accelererad, är då vagnen nått backens slut 54 km/tim. Hur många kWh har motorn förbrukat på dessa 500 m? Motorns verkningsgrad är 90 %. Friktions- och luftmotstånd kan i genomsnitt sammanlagt uppskattas till 0,9 % av vagnens tyngd.

2. Man önskade bestämma specifika värmet för aluminium och uppvärmde därför ett litet aluminiumrör i en ångmantel, dvs. ett cylindriskt rum med dubbla väggar, mellan vilka vattenånga får strömma. Det inre rummet är nedtill slutet med en kork, på vilken aluminiumröret vilar, och upptill med en kork med termometer, som gör det möjligt att avläsa rörets temperatur. Vid ett försök vägde röret 15,9 g. Då termometern visade 98,0°C, fördes en kalorimeter under ångmanteln, den undre korken avlägsnades, och aluminiumröret hissades ned i kalorimetern. Denna innehöll 95,2 g vatten av temperaturen 19,3°C, var effektivt värmeisolerad och hade värmekapaciteten (»vattenvärdet») 12,9 cal/grad. Efter omröring avlästes blandningstemperaturen 21,6°C. Värdet på det sökta specifika värmet blev för lågt, vilket kunde förklaras därigenom, att röret avkyldes under nedhissandet från 98,0°C till en något lägre temperatur. Beräkna storleken av denna temperatursänkning. Det riktiga värdet på specifika värmet för aluminium är 0,214 cal/g · grad.
3. Om en utanför jordatmosfären befintlig observationsstation rör sig på lämpligt avstånd från jordytan, kan den bringas att ständigt befinna sig vertikalt ovanför en bestämd ort vid jordens ekvator. Beräkna detta avstånd, då jordens omloppstid kring sin axel sättes till 24 timmar och dess radie till 6400 km.
4. En tunn plankonvex flintglaslins och en tunn plankonkav kronglaslins är med sammanfallande huvudaxlar placerade med de plana ytorna tätt intill varandra. Brytningsindex för en viss ljussort är för flintglas 1,75 och för kronglas 1,52. Flintglaslinsens buktiga yta har krökningsradien 20 cm, och systemets brännvidd för ifrågavarande ljussort är 60 cm. Beräkna krökningsradien för kronglaslinsens buktiga yta.
5. Intill ena kanten av en vertikal skärm placeras i punkten A en liten ellampa. En tunn konvex lins B uppställes 20 cm från A med huvudaxeln, som är horisontell, gående genom A. I det från B utgående konvergenta strålknippet placeras en plan spegel, parallell med skärmen och på ett avstånd av 30 cm från densamma. I en punkt C på skärmen erhålles då en skarp bild av lampan. Sträckan AC på skärmen är 80 cm. Beräkna linsens brännvidd. Endast centrala strålar beaktas. Figur med enkel strålgång erfordras.
6. AC är en homogen, jämntjock, 1000 mm lång metalltråd med resistansen 1,50 ohm. Till A och C anslutes med praktiskt taget resistanslösa ledningstrådar ett torrelement. Mellan A och en glidkontakt B, som kan förskjutas längs metalltråden, är i serie inkopplade ett element med konstant emk (normalelement), ett motstånd samt en galvanometer. Galvanometern blir strömlös, då sträckan

AB är 800 mm. Inkopplas i serie med torrelementet ett motstånd med resistansen 0,25 ohm, måste glidkontakten flyttas 115 mm från sitt förra läge, för att galvanometern åter skall bli strömlös. Hur stor är torrelementets inre resistans? Kopplingsschema med poler och strömriktning markerade erfordras.

7. Ett ackumulatorbatteri med konstant emk är slutet med två seriekopplade motstånd *AB* och *CD* med obekanta resistanser. Man ville vid ett tillfälle få kännedom om spänningen över *CD* och kopplade därför parallellt med detta motstånd en voltmeter. Denna var försedd med två mätområden, dels 0—5 V, dels 0—25 V; övergången från det mindre till det större mätområdet åstadkoms med ett i voltmetern inbyggt förkopplingsmotstånd. Användes det mindre mätområdet, visade voltmetern 4,8 V; användes det större mätområdet, visade voltmetern 5,5 V. Vilket värde hade spänningen över *CD*, innan voltmetern anslöts? Kopplingsschema erfordras.
8. Då en elektron övergår från en energinivå till en energifattigare nivå, omvandlas energiskillnaden E mellan nivåerna till elektromagnetisk strålning, som ger upphov till en spektrallinje med en viss frekvens ν och däremot svarande våglängd λ. Enligt Plancks formel är $E = h \cdot \nu$, där konstanten h har värdet $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ joulesek, om energin mätes i joule och frekvensen i perioder per sek. I vätets spektrum finns en röd spektrallinje med våglängden 6563 Å. Bestäm skillnaden mellan motsvarande nivåers energi. Energiskillnaden skall uttryckas i enheten elektronvolt, som är den energiändring en elektron undergår, då den genomlöper ett elektriskt fält med potentialdifferensen 1 V. Elektronladdningen är $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ coulomb, ljusets hastighet $3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/sek och 1 Å 10^{-10} m.

Resultat: **1.** 0,66 kWh. **2.** 3,3°. **3.** 36 000 km. — Som närmevärde på den av gravitationen orsakade accelerationen vid ekvatorn har använts 9,8 m/sek². Problemtexten borde nog ha innehållit denna eller någon liknande upplysning. **4.** Krökningsradien är 25 cm, om systemets brännvidd är +60 cm (och 9,6 cm, om den är −60 cm). **5.** 16 cm. **6.** 0,24 ohm. **7.** 5,7 V. **8.** 1,89 eV.

Forts. från sid. 235

P. Frauenfelder/P. Huber, *Einführung in die Physik.* Band 2. Elektrizitätslehre, Wellenlehre, Akustik, Optik. Ernst Reinhardt Verlag, Basel, 1958, 504 S., fr. 28,50.

Den föreliggande bokens huvudsyfte är tydligen att ge en grundläggande orientering i ämnet och därmed de förkunskaper, som erfordras för ett mera avancerat teoretiskt studium av fysiken. Därför har huvudvikten lagts vid utredningar och förklaringar. Författarna har därvid bemödat sig om att framställa de olika fysikaliska förloppen och företeelserna som konsekvenser av vissa grundläggande, experimentellt funna fakta. Såtillvida behandlar författarna fysiken som ett experimentellt ämne. Däremot ges endast i undantagsfall detaljerade anvisningar för hur de fysikaliska experimenten utföres. Denna underlåtenhet är, som framgår av förordet, fullt medveten.

I enlighet med bokens huvudsyfte har stor vikt lagts vid definitioner, enheter och dimensioner. MKSA-systemet har konsekvent använts, men i ett bihang ges en översikt av sambandet mellan detta system samt det elektrostatiska och det elektromagnetiska systemet.

De matematiska hjälpmedlen inskränker sig till ungefär vad som läses på reallinjens matematiska gren, vilket givetvis medför en begränsning av ämnesbehandlingen men å andra sidan överensstämmer med bokens syfte att ge en första introduktion i fysik, baserad på studentkunskaperna.

Ämnesbehandlingen är förvånansvärt fyllig, samtidigt som den är koncis och präglad av vederhäftighet. Som exempel på den koncisa men dock utförliga framställningen kan nämnas avsnittet om fotometri, som förf. behandlar på 10 sidor och vari han klart utreder skillnaden mellan objektiv och subjektiv fotometri och de till dessa båda fotometrier hörande grundbegreppen. Ett annat exempel erbjuder vågrörelselären, där förf. på ett par sidor utreder uppkomsten av bukar och noder vid stående vågrörelse och därvid visar skillnaden i läget mellan elongations- resp. tryck- och täthetsnoder. Någon gång blir framställningen alltför kortfattad. Vid behandlingen av den elektriska svängningskretsen nämnes den i spolen inducerade elektromotoriska kraften, först sedan kondensatorn urladdats, vilket gör framställningen oklar och lämnar frågan, varför strömmen blir maximal, först då kondensatorn urladdats, helt obesvarad.

Dylika brister utgör emellertid sällsyntheter. I allmänhet är bokens framställning förträfflig även ur rent pedagogisk synpunkt. Av denna anledning såväl som på grund av dess imponerande sakrikedom torde boken utöver sin egentliga målsättning ha en väsentlig uppgift som handbok för fysiklärare.

Arvid Ljunghall

Insänd litteratur

John Wiley & Sons, Inc., New York/Chapman & Hall Ltd., London, 1958:

W. HUREWICS, *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Pp. 122, $ 5.00.
S. GOLDBERG, *Introduction to Difference Equations*. Pp. 260, $ 6.75.
J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis*. Pp. 244, $ 8.50.
A. K. SUSSKIND (Editor), *Notes on Analog-Digital Conversion Techniques*. Pp. 370, $ 10.00.
C. KITTEL, *Elementary Statistical Physics*. Pp. 228, $ 8.00.
A. P. FRENCH, *Principles of Modern Physics*. Pp. 355, $ 6.75.
M. I. SINNOT, *The Solid State for Engineers*. Pp. 522, $ 12.50.
H. G. HOUGHTON (Editor), *Atmospheric Explorations*. Pp. 125, $ 6.50.
M. J. Zucrow, *Aircraft and Missile Propulsion*, Vol. I. Pp. 538, $ 11.50.
M. L. HUGGINS, *Physical Chemistry of High Polymers*. Pp. 175, $ 6.50.
W. G. PFANN, *Zone Melting*. Pp. 226, $ 7.50.
D. P. ECKMAN, *Automatic Process Control*. Pp. 368, $ 9.00.
L. G. PECK/R. N. HAZELWOOD, *Finite Queuing Tables*. Pp. 210, $ 8.50.
A. VAZSONYI, *Scientific Programming in Business and Industry*. Pp. 474, $ 13.50.
FR. F. STEPHAN/PH. I. MCCARTHY, *Sampling Opinions*. Pp. 451, $ 12.00.
V. CHEW (Editor), *Experimental Design in Industry*. Symposium Nov. 1956. Pp. 268, $ 6.00.
A Comprehensive Bibliography on Operations Research. Through 1956 with Supplement for 1957. Pp. 188, $ 6.50.
Conference on Extremely High Temperatures. Editors: H. Fischer/L. C. Manner. Pp. 258, $ 9.75.
C. C. CARR, *Electric Machinery*. Pp. 537, $ 9.25.
J. S. BENDAT, *Principles and Applications of Random Noise Theory*. Pp. 431, $ 11.00.

V. L. STEETOR, *Fluid Mechanics*. Sec. Ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1958, Pp. 480, 58 s. net.
Calculus of Variations and its Applications. Symposium, Chicago 1956. McGraw-Hill Book Co., New York, 1958, Pp. 151, 58 s. net.
W. R. MYERS, *Theoretical Electromagnetism*. Butterworths Scientific Publications, London, 1958, Pp. 274, 42 s.
J. E. HOOPER/M. SCHARFF, *The Cosmic Radiation*. Methuen's Monographs on Physical Subjects, London, 1958, Pp. 172, 12 s. 6 d. net.
G. STEPHENSON/C. W. KILMISTER, *Special Relativity for Physicists*, Longmans, Green & Co., London 1958, Pp. 108, 18 s. net.
A. F. GIBSON/P. AIGRAIN/R. E. BURGES (Editors), *Progress in Semiconductors*. Vol III. Heywood & Co., London 1958, Pp. 210, 55 s. net.
Reports on Progress in Physics, Vol. XXI (1958). The Physical Society, London, 1958, Pp. 283, £2 3s.

New Chemistry, A »Scientific American Book», British Ed., Bell & Sons, London, 1958, Pp. 206, 13 s. 6 d. net.

The Universe, A »Scientific American Book», British Ed., Bell & Sons, London, 1958, Pp. 142, 13 s. 6 d. net.

L. Derwidué, *Introduction a l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique.* Masson & Cie, Paris, 1958, 432 p., 6000 fr.

D. Dugué, *Traité de statistique théorique et appliquée.* Masson & Cie, Paris, 1958, 314 p., 5200 fr.

R. Comelet, *Introduction a l'analyse dimensionelle et aux problèmes de similitude en mécanique des fluides.* Masson & Cie, Paris, 1958, 116 p., 1600 fr.

G. Raoult, *Les ondes centimétriques.* Masson & Cie, Paris, 1958, 401 p., 6500 fr.

V. Karnojitzki, *Les peroxydes organiques.* Hermann, Paris, 1958, 142 p., 1200 fr.

Colloque d'Algèbre supérieure (Bruxelles 19—22 déc. 1956). Gauthier-Villars, Paris/Établissements Ceuterick, Louvain, 1957, 293 p., 250 fr. belges.

P. Frauenfelder/P. Huber, *Einführung in die Physik.* II. Band. Elektrizitätslehre, Wellenlehre, Akustik, Optik. Reinhardts Verlag, Basel, 1958, 504 S., 28,50 Fr.

O. Höfling, *Physik-Aufgaben.* Oberstufe. Dümmlers Verlag, Bonn, 1958, 88 S., DM 3,40.

O. Höfling/W. Jacob, *Physik für Mittelschulen,* Bd I. Dümmlers Verlag, Bonn, 1958, 260 S., DM 5,90.

Ph. Lötzbeyer, *Vierstellige Tafeln.* 17 Aufl. W. de Gruyter, Berlin, 1958, 46 S., DM 3,00.

G. Hoheisel, *Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.* Sammlung Göschen Bd. 1059. W. de Gruyter, Berlin, 1958, DM 2,40.

K. Strubecker, *Differentialgeometrie.* II. Theorie der Flächenmetrik. Sammlung Göschen Bd. 1179/1179a. W. de Gruyter, Berlin, 1958, 198 S., DM 4,80.

K. Freudenberg/H. Plieniger, *Organische Chemie.* 8. Aufl. Quelle & Meyer, Heidelberg, 1958, 244 S., DM 9,80.

W. A. Sexton, *Chemische Konstitution und biologische Wirkung.* Verlag Chemie, Weinheim, 1958, 439 S., DM 29,60.

Svensk Naturvetenskap 1957/58. Statens Naturvetenskapliga Forskningsråds Årsbok. Stockholm, 1958, 398 s., kr. 18: —. Nordiska Bokhandeln i distribution.

H. Hallendorff, *Skärande bearbetning.* I serien »Läroböcker i verkstadsteknik», Svenska Bokförl./Bonniers, Stockholm, 1958, 316 s., kr. 17: 50.

E. Storm, *Gjutning.* I serien »Läroböcker i verkstadsteknik», Svenska Bokförl./Bonniers, Stockholm, 1958, 130 s., kr. 12: —.

S. Skarbäck, *Studentmatematik.* Uppg. på latinlinjen, jan. 1953—nov. 1957, med lösningar. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1958, 144 s., kr. 11: 50.

Lindström/Jonzon/Jansson, *Nya räkneboken.* Sjunde klassen. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1958, 112 s., kr. 2: 75.

Trettonde Skandinaviska Matematikerkongressen, Helsingfors, 18—23 aug. 1957. Mötesberättelse, Helsingfors 1958, 208 s.

Nu i förkortad upplaga

Nyhlén · Amundsson · Broman

Funktionslära och analytisk geometri

Rymdgeometri

Avsedda för allmänna linjens sociala gren och reallinjens biologiska gren

Utkommer i mitten av oktober!

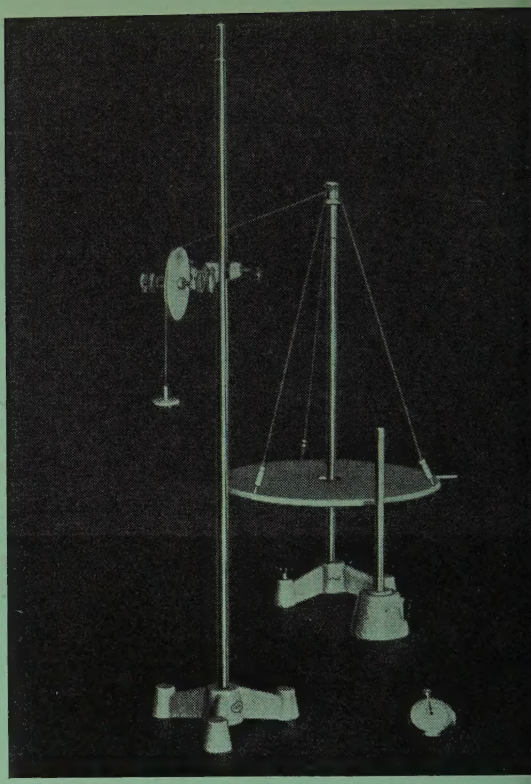
Tidigare föreligger för realgymnasiets matematiska gren:

Planimetri och trigonometri	**G inb.**	**4:85**
Funktionslära och analytisk geometri	**G inb.**	**12:—**
Rymdgeometri	**G**	**4:75**

SVENSKA BOKFÖRLAGET

SKOLBOKCENTRALEN
David Bagaresgata 20, Stockholm C · Postgiro 55 160
UTSTÄLLNING · LÄRAREXEMPLAR · REKVISITIONER
Utställning även Göteborg, Parkgatan 19
Malmö, Hamngatan 4 · *Linköping*, Klostergatan 26
Luleå, Tullgatan 16 · *Sundsvall*, Rådhusgatan 37

PHYWE



MATERIEL
för
LÄTTARE och
ÅSKÅDLIGARE
UNDERVISNING

Phywes välkända fysikmateriel representeras i Sverige med ensamrätt av Norstedts Skolavdelning. Se och pröva materielen på någon av våra utställningar eller rekvirera den rikt illustrerade specialkatalogen.

NORSTEDTS SKOLAVDELNING

Stockholm	Göteborg	Malmö	Linköping	Luleå
L:a Nygatan 13	Parkgatan 19	Hamngatan 4	Klostergatan 26	Tullgatan 16
Tel. 23 29 70	Tel. 13 92 93	Tel. 97 70 90	Tel. 487 20, 487 35	Tel. 134 10

Lund 1958, Håkan Ohlssons Boktryckeri